ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ.

Μονάδες 2

Α.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + Γ = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Μονάδες 4,5

Α.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = ρ^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = ρ^2$.

Μονάδες 6

Β.1. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*
Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του M(1,-3). Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση:

Α. $x + 3y = 10$, Β. $5x - y = 8$, Γ. $x - 3y = 10$,
Δ. $3x + 2y = 3$, Ε. $\frac{1}{2}x + y = 5$

Μονάδες 4

Β.2. *Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη **Στήλη Β** τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης***

Α *και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της* ***Στήλης Β*** *που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.*

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	1. Κ (0, -1), $\rho = 2$
β. $x^2 + (y + 1)^2 = 4$	2. Κ (3, -2), $\rho = 1$
	3. Κ (3, -2), $\rho = 4$

Μονάδες 4

Β.3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το σημείο (1, -1) ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $\alpha = 6k + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$ και k ακέραιος.

Να δείξετε ότι:

α) οι παραπάνω ακέραιοι α που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή $\alpha = 6k + 1$ ή τη μορφή $\alpha = 6k + 5$, όπου k ακέραιος

Μονάδες 10

β) το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $\alpha^2 = 3\mu + 1$,όπου μ ακέραιος

Μονάδες 10

γ) η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.

Μονάδες 7

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k, ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες 8

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

Μονάδες 8

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2, 2), Λ(-1, 5) και Μ(1, 3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ και Μ.

Μονάδες 4,5

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

Μονάδες 6,5