ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{\nu}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\nu}$, τότε να αποδείξετε ότι

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\nu}$.

Μονάδες 7

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xy+x_1y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.

Μονάδες 2

δ. Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

Μονάδες 2

Γ. **α.** Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$, πότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α;

Μονάδες 5

β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $\alpha\in\mathbf{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή $\alpha^3=8k$ όπου $k\in\mathbf{Z}$ ή $\alpha^3=2k+1$ όπου $k\in\mathbf{Z}$.

Μονάδες 12

Β. Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2+1)$ είναι άρτιος.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1,\ 3\lambda+2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Β. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 8

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και

η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2$, $p>0$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0,\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και $E'\left(0,-\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία
$K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9