17 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ LEGENDRE

17.1 Ορισμοί

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη *διαφορική εξίσωση Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

καλούνται *συναρτήσεις Legendre τάξης n*.

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Legendre είναι

$$y = c_1 U_n(x) + c_2 V_n(x)$$

όπου

$$U_n(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots$$

$$V_n(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots$$

και c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Οι σειρές αυτές συγκλίνουν για $-1 < x < 1$. Στα παρακάτω περιοριζόμαστε σε μη αρνητικό ακέραιο n.

Με $n = 0, 1, 2, \cdots$, μια από αυτές τις σειρές περατούται και δίνει ένα *πολυώνυμο Legendre*

$$P_n(x) = \begin{cases} U_n(x)/U_n(1), & n = 0, 2, 4, \ldots \\ V_n(x)/V_n(1), & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$U_n(1) = \frac{(-1)^{n/2}2^n}{n!}\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2, \qquad n = 0, 2, 4, \ldots$$

$$V_n(1) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}2^{n-1}}{n!}\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Η άλλη σειρά έχει άπειρους όρους και πολλαπλασιασμένη επί μια κατάλληλη σταθερή δίνει τη *συνάρτηση Legendre δεύτερου είδους και τάξης n*

$$Q_n(x) = \begin{cases} U_n(1)V_n(x), & n = 0, 2, 4 \ldots \\ -V_n(1)U_n(x), & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

17.2 Πολυώνυμα Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre δίνονται από τον *τύπο του Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$P_0(x) = 1$

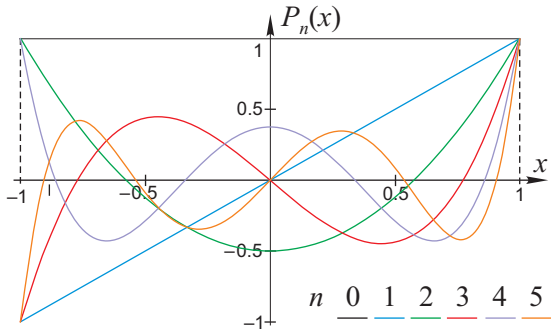
$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$



Σχ. 17-1

$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$

Με $x = \cos\theta$ παίρνουμε

$P_0(\cos\theta) = 1$

$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2\theta)$

$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(3\cos\theta + 5\cos 3\theta)$

$P_4(\cos\theta) = \frac{1}{64}(9 + 20\cos 2\theta + 35\cos 4\theta)$

$P_5(\cos\theta) = \frac{1}{128}(30\cos\theta + 35\cos 3\theta + 63\cos 5\theta)$

$P_6(\cos\theta) = \frac{1}{512}(50 + 105\cos 2\theta + 126\cos 4\theta + 231\cos 6\theta)$

$P_7(\cos\theta) = \frac{1}{1024}(175\cos\theta + 189\cos 3\theta + 231\cos 5\theta + 429\cos 7\theta)$

$P_8(\cos\theta) = \frac{1}{16384}(1225 + 2520\cos 2\theta + 2772\cos 4\theta + 3432\cos 6\theta + 6435\cos 8\theta)$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \qquad |t|<1$$

Αναδρομικές σχέσεις

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

$$(x^2 -)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

Επειδή τα $P_m(x)$ και $P_n(x)$ ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση για $m \neq n$, καλούνται *ορθογώνια* στο $-1 \le x \le 1$.

Αναπτύγματα σε σειρά πολυωνύμων Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre συνιστούν *πλήρη ομάδα συναρτήσεων*, δηλαδή κάθε τμηματικά λεία συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $-1 < x < 1$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά πολυωνύμων Legendre στη μορφή

$$f(x) = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + \cdots$$

$$A_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx$$

Στα σημεία ασυνέχειας η σειρά δίνει το άθροισμα $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Ιδιότητες

$$P_n(1) = 1 \qquad P_n(-1) = (-1)^n \qquad P_n(-x) = (-1)^nP_n(x)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ (-1)^{n/2}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi$$

$$\int P_n(x)\,dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1}$$

$$|P_n(x)| \le 1 \qquad \text{στο } -1 \le x \le 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz \qquad \text{[ολοκλήρωμα του Schläfli]}$$

όπου C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο z και x ένα εσωτερικό σημείο.

$$P_n(x) = F\left(-n,\, n+1;\, 1;\, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{2n!}{2^n (n!)^2} x^n F\left(-\frac{n}{2},\, \frac{1-n}{2};\, \frac{1}{2} - n;\, \frac{1}{x^2}\right)$$

όπου F η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Η σχέση αυτή ισχύει γενικά και για μη ακέραιο n, οπότε δίνει τη *συνάρτηση Legendre πρώτου είδους*. Στην περίπτωση αυτή η $P_n(x)$ έχει ανώμαλα σημεία στα $x = -1$ και $x = \infty$.

Η εξίσωση $P_n(x) = 0$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες, όλες στο διάστημα (0, 1).

17.3 Συναρτήσεις Legendre Δεύτερου Είδους

Οι συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους $Q_n(x)$ ορίζονται ως οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Legendre που αποκλίνουν στα άκρα του διαστήματος $-1 < x < 1$ και ικανοποιούν τη συνθήκη συμμετρίας

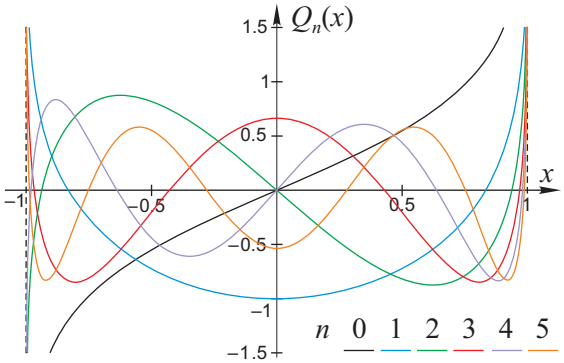
$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x)$$

Η απόκλιση είναι λογαριθμική, όπως φαίνεται και από τις πρώτες συναρτήσεις που είναι

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}$$



Σχ. 17-2

$$Q_3(x)=\frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{5x^2}{2}+\frac{2}{3}$$

$$Q_4(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{16}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{35x^3}{8}+\frac{55x}{24}$$

$$Q_5(x)=\frac{63x^5-70x^3+15x}{16}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{63x^4}{8}+\frac{49x^2}{8}-\frac{8}{15}$$

Γενικά είναι

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(x)-\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(x)-\frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(x)-\cdots$$

$$Q_n(x)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{3}{2})}x^{-n-1}F\left(\frac{n+2}{2},\frac{n+1}{2};\frac{2n+3}{2};\frac{1}{x^2}\right)$$

όπου F η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Η σχέση αυτή ισχύει γενικά και για μη ακέραιο n, οπότε η $Q_n(x)$ έχει ανώμαλα σημεία στα $x=\pm1$ και $x=\infty$.

Οι συναρτήσεις $Q_n(x)$ ικανοποιούν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τα πολυώνυμα Legendre (Ενότητα 17.2).

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Legendre μπορεί να γραφεί

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x)$$

Η ορίζουσα του Wronski είναι

$$W\{P_n(x), Q_n(x)\} = -(1-x^2)^{-1}$$

17.4 Προσαρτημένες Συναρτήσεις Legendre

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την *προσαρτημένη διαφορική εξίσωση του Legendre*

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

καλούνται *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre*. Στα επόμενα περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου τα m, n είναι ακέραιοι αριθμοί με $n \geq 0$, $-n \leq m \leq n$ και $-1 < x < 1$.

Η γενική λύση της προσαρτημένης διαφορικής εξίσωσης του Legendre είναι

$$y = c_1 P_n^m(x) + c_2 Q_n^m(x)$$

όπου $P_n^m(x)$ και $Q_n^m(x)$ είναι οι *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου και δεύτερου είδους* αντίστοιχα.

Προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους

Οι *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους* ορίζονται από τα πολυώνυμα Legendre με τη σχέση

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n$$

όπου $P_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre. Ας σημειωθεί ότι το δεξιό μέλος της προηγούμενης σχέσης έχει νόημα και για αρνητικό m με $-n \le m \le n$. Γενικά είναι

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x)$$

Επίσης ορίζουμε $P_n^m(x) = 0$ για $m < -n$ ή $m > n$. Για τις τιμές των $P_n^m(x)$ έχουμε

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x) \quad \text{και} \quad P_n^m(\pm 1) = 0 \text{ για } m \neq 0$$

Οι πρώτες συναρτήσεις είναι

$$P_n^0(x) = P_n(x) \quad \text{για κάθε } n$$

$n = 1$ $\quad P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin\theta$

$n = 2$ $\quad P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}\sin 2\theta$

$\quad P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$

$n = 3$ $\quad P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta)$

$\quad P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta)$

$\quad P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2} = \frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$

$n = 4$ $\quad P_4^1(x) = \frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2} = \frac{5}{16}(2\sin 2\theta + 7\cos 4\theta)$

$$P_4^2(x) = \tfrac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) = \tfrac{15}{16}(3 + 4\cos 2\theta - \cos 4\theta)$$

$$P_4^3(x) = 105x(1 - x^2)^{3/2} = \tfrac{105}{8}(2\sin 2\theta - \sin 4\theta)$$

$$P_4^4(x) = 105(1 - x^2)^2 = \tfrac{105}{8}(3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta)$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}t^m}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x)t^n$$

Αναδρομικές σχέσεις

$$(n - m + 1)P_{n+1}^m(x) - (2n+1)xP_n^m(x) + (n + m)P_{n-1}^m(x) = 0$$

$$(1 - x^2)^{1/2}P_n^{m+2}(x) - 2(m + 1)xP_n^{m+1}(x) + (n - m)(n + m + 1)P_n^m(x) = 0$$

$$(1 - x^2)P_n^{m\prime}(x) - (n + 1)xP_n^m(x) + (n - m + 1)P_{n+1}^m(x) = 0 \qquad (' = d/dx)$$

Ορθογωνιότητα

Οι συναρτήσεις $P_n^m(x)$ και $P_l^m(x)$ είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους 1:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_l^m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nl}$$

Οι συναρτήσεις $P_n^k(x)$ και $P_n^m(x)$ είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $(1 - x^2)^{-1}$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^k(x)P_n^m(x)\,dx = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{km}$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_m P_m^m(x) + A_{m+1}P_{m+1}^m(x) + A_{m+2}P_{m+2}^m(x) + \cdots$$

$$A_k = \frac{2k+1}{2}\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_k^m(x)dx$$

Σχέση με υπεργεωμετρικές συναρτήσεις

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!m!}F\left(m-n,\, m+n+1;\, m+1;\, \frac{1-x}{2}\right)$$

Προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους

Οι *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους* ορίζονται από τις συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους με τη σχέση

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x)$$

Οι συναρτήσεις αυτές απειρίζονται για $x = \pm 1$, ενώ οι $P_n{}^m(x)$ είναι πεπερασμένες για $x = \pm 1$.

Οι συναρτήσεις $Q_n{}^m(x)$ ικανοποιούν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τις $P_n{}^m(x)$.

17.4 Σφαιρικές Αρμονικές

Διάφορα προβλήματα φυσικής σε τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο καταλήγουν στο μαθηματικό πρόβλημα επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους, όπως είναι η εξίσωση του Laplace, η εξίσωση του Helmholtz και η εξίσωση του Schrödinger. Ακολουθώντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες r, θ, φ, αν δεχθούμε ότι η λύση γράφεται ως άθροισμα συναρτήσεων της μορφής $R(r)Y(\theta, \varphi)$, προκύπτει για την $Y(\theta, \varphi)$ η διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y=0$$

Περαιτέρω χωρισμός των μεταβλητών με την αντικατάσταση $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ δίνει για την $\Phi(\varphi)$ τη ΣΔΕ

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0$$

με λύσεις $\Phi = e^{\pm im\varphi}$. Για την $\Theta(\theta)$ παίρνουμε μια ΣΔΕ η οποία με την αντικατάσταση $x = \cos\theta$, $P(x) = \Theta(\theta)$ καταλήγει στη διαφορική εξίσωση των προσαρτημένων πολυωνύμων Legendre (Ενότητα ??). Οι συνοριακές και άλλες φυσικές συνθήκες επιβάλουν να είναι ακέραιοι οι n και m και επιπλέον $n \geq 0$, $-n \leq m \leq n$. Συνεπώς, η εξάρτηση της γενικής λύσης από τις γωνίες θ και φ εκφράζεται με τις συναρτήσεις

$$Y_n{}^m(\theta,\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n{}^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

που καλούνται *σφαιρικές αρμονικές*. Ο σταθερός συντελεστής έχει επιλεγεί έτσι ώστε να είναι (ο αστερίσκος σημαίνει το συζυγή μιγαδικό)

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_n^{m}{}^{*}(\theta,\varphi)Y_{n'}^{m'}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\delta_{nn'}\delta_{mm'}$$

Η συνθήκη αυτή καθιστά το σύνολο σφαιρικών αρμονικών ένα *ορθογώνιο* και *μοναδιαίο* σύνολο συναρτήσεων.

Οι πρώτες σφαιρικές αρμονικές $Y_n^m(\theta,\varphi)$ είναι

$n=0$ $\quad Y_0^0=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$n=1$ $\quad Y_1^0=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta$ $\qquad Y_1^1=-\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\,e^{i\varphi}$

$n=2$ $\quad Y_2^0=\sqrt{\dfrac{5}{4\pi}}\left(\dfrac{3}{2}\cos^2\theta-\dfrac{1}{2}\right)$ $\qquad Y_2^1=-\sqrt{\dfrac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta\,e^{i\varphi}$

$\quad Y_2^2=\sqrt{\dfrac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta\,e^{2i\varphi}$

$n=3$ $\quad Y_3^0=\sqrt{\dfrac{7}{4\pi}}\left(\dfrac{5}{2}\cos^3\theta-\dfrac{3}{2}\cos\theta\right)$ $\qquad Y_3^1=-\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{21}{4\pi}}\sin\theta\left(5\cos^2\theta-1\right)e^{i\varphi}$

$\quad Y_3^2=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{105}{2\pi}}\sin^2\theta\cos\theta\,e^{i\varphi}$ $\qquad Y_3^3=-\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{35}{4\pi}}\sin^3\theta\,e^{3i\varphi}$

Για $m<0$ οι σφαιρικές αρμονικές προκύπτουν από τη σχέση

$$Y_n^{-m}(\theta,\varphi)=(-1)^m Y_n^{m}{}^{*}(\theta,\varphi)$$

Το θεώρημα πρόσθεσης σφαιρικών αρμονικών

Σε σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,φ) ένα ζεύγος τιμών των θ και φ ορίζει μία κατεύθυνση στο χώρο. Δύο ζεύγη τιμών (θ_1,φ_1) και (θ_2,φ_2) ορίζουν δύο κατευθύνσεις και μία μεταξύ τους γωνία γ, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

Γενικότερα, το *θεώρημα πρόσθεσης σφαιρικών αρμονικών* εκφράζεται με τη σχέση

$$P_n(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n}Y_n^m(\theta_1,\varphi_1)Y_n^{m}{}^{*}(\theta_2,\varphi_2)$$

Ανάπτυγμα συναρτήσεων

Κάθε συνάρτηση $f(\theta, \varphi)$, ορισμένη στην επιφάνεια μιας σφαίρας και αρκετά παραγωγίσιμη και συνεχής, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά σφαιρικών αρμονικών σύμφωνα με τον τύπο

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi)$$

όπου ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$)???

$$A_{nm} = \int f(\theta, \varphi) Y_n^m{}^*(\theta, \varphi)\, d\Omega$$