Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (6/7/99)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0)=0$.

Β. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)>4\left(f'(x)-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(x,y) που είναι τέτοια ώστε $|z-1|^2+|z-3-2i|^2=6$ είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

β) Έστω O η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι οι δυο εφαπτόμενες που άγονται από το O προς τον παραπάνω κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δυο σημείων επαφής M_1, M_2.

Β. Έστω $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και έστω C κύκλος με κέντρο (2,1) και ακτίνα 1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

$E=\{\omega\in\Omega/$ το σημείο $M(\omega,1)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου $C\}$

$Z=\{\omega\in\Omega/$ το σημείο $N(2,\omega)$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου $C\}$.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων E,Z και $E\cup Z$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $|\overrightarrow{AB}|=4,\ |\overrightarrow{A\Gamma}|=6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν M είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τότε

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$

β) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$

Β. Έστω A,B νxν πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι ισχύει $A^2+AB+I=B^2+BA+I=O$ όπου I είναι ο νxν μοναδιαίος πίνακας και O είναι ο μηδενικός νxν πίνακας.

Να αποδείξετε ότι

α) i) Ο πίνακας A+B έχει αντίστροφο

ii) A=B

β) ο ν είναι άρτιος.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2},\ t\in[1,4]$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 f(t)dt$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^4 f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt,\ x>0$

i) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε $t\in[1,4]$ και x>0.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Β. Έστω $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $h(x)=1999(x-1)+\int_1^x \dfrac{h(t)}{t}dt$ για κάθε $x\ge 1$

Να αποδείξετε ότι

α) $h(x)=1999\,x\ln x,\ x\ge 1$

β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.