Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (24/6/98)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. α) Αν ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$ με $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu$ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha_\nu\neq 0$, να αποδείξετε ότι και ο συζυγής του $\bar{z}_0$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

β) Αν η πολυωνυμική εξίσωση $\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί έχει ως ρίζα το μιγαδικό 2-3i να βρείτε τα β, γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2+\beta\chi+\gamma$ στο σημείο A(1,f(1)) όταν το χ μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R.

Β. Η συνάρτηση $f:R\to R$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(\chi))+f^3(\chi)=2\chi+3,\ \chi\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «ένα προς ένα»

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2\chi^3+\chi)=f(4-\chi),\ \chi\in R$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z_0 με $\operatorname{Im} z_0<999$ και το σύνολο Α των μιγαδικών αριθμών z με $z\neq z_0$ και $z\neq\bar{z}_0$ που ικανοποιούν τη σχέση $\dfrac{1}{|z-z_0|}+\dfrac{1}{|z-\bar{z}_0|}=\dfrac{1998}{|z-z_0||z-\bar{z}_0|}$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου Α. Ποιοι είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί; Να εξετάσετε την περίπτωση $z_0=\bar{z}_0$.

Β. Ένας γεωργός προσθέτει χ μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει g(χ) μονάδες του παραγόμενου προϊόντος.

Αν $g(\chi)=M_0+M(1-e^{-\mu\chi}),\ \chi\geq 0$ όπου M_0, M και μ είναι θετικές σταθερές να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της g(χ). Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0;

ΖΗΤΗΜΑ 3

α) Δίνεται ο νxν πίνακας Α με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς για τον οποίο ισχύει: $A^2-2(\lambda-2)^2A+I=0$ όπου I είναι ο μοναδιαίος νxν πίνακας και λ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι ο πίνακας A+I είναι αντιστρέψιμος για κάθε λ.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\chi+1)|A+\chi I|+(\chi-1)|A-\chi I|=1-\chi^2$ όπου Α είναι ο πίνακας του ερωτήματος α) και χ πραγματικός αριθμός έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (-1,1).

Με $|A+\chi I|$ και $|A-\chi I|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A+χI και A-χI αντίστοιχα.

γ) Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ με πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων που

ικανοποιούν τις σχέσεις:2P(1)=2P(3)=2P(5)=2P(7)=3P(2)=3P(4)=3P(6)=3P(8) και το ενδεχόμενο

$$B=\left\{\lambda\in\Omega\left(\begin{matrix}\text{το σύστημα } AX=X \text{ έχει}\\ \text{τουλάχιστον δυο λύσεις}\end{matrix}\right)\right\}$$ όπου X ένας νx1 άγνωστος πίνακας και A ο πίνακας του ερωτήματος α). Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B.

δ) Δίνεται το τριώνυμο $f(\chi)=\chi^2+\gamma\chi+4$ όπου ο συντελεστής γ επιλέγεται τυχαία από το δειγματικό χώρο Ω του ερωτήματος γ) .

Αν $\Gamma=\left\{\gamma\in\Omega\left(\begin{matrix}\text{η εξίσωση } f(\chi)=0\\ \text{έχει πραγματικές ρίζες}\end{matrix}\right)\right\}$

Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ και να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα B (του ερωτήματος γ) και Γ είναι ασυμβίβαστα .

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν f(χ)>0,χ>0, $f'(\chi)+2\chi f(\chi)=0,\ \chi>0$ και η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1,1)

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\chi-1}{2\chi^2}f(\chi)<\int_1^{\chi}\frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{\chi-1}{2},\ \chi>1$

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(\chi)=\int_1^{\chi}\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt,\ \chi>1$

δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^{\chi}e^{-t^2}dt<1$ για κάθε χ μεγαλύτερο του ένα.