Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης (25/6/96)

ΖΗΤΗΜΑ1ο Α. Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in R$ με $\alpha<\beta<\gamma$ και $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \beta & \beta^2\\ 1 & \gamma & \gamma^2\end{bmatrix}$. Θεωρούμε το 3χ3 γραμμικό σύστημα AX=B όπου $X=\begin{bmatrix}\chi\\ \psi\\ \omega\end{bmatrix}$ με αγνώστους $\chi,\psi,\omega\in R$.

Έστω D η ορίζουσα του πίνακα A και D_χ,D_ψ,D_ω οι ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν αντικαταστήσουμε την $1^η$, $2^η$ και $3^η$ στήλη αντίστοιχα με τη στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Έστω ότι $D_\chi^{\,2}+D_\psi^{\,2}+D_\omega^{\,2}+2D^2=2D(D_\chi-D_\psi)$ Να λυθεί το σύστημα AX=B.

Β. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ και το πολυώνυμο $f(\chi)=-\chi^2+3\chi+1$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ έτσι ώστε : $|A-\lambda I|=0$ όπου **I** ο μοναδιαίος πίνακας.

β) Αν B συμβολίζει τον πίνακα $(f(3)-1)(A-I)^2+A-f(1)I$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $X=\begin{bmatrix}\chi\\ \psi\\ \omega\end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε BX=O όπου O ο μηδενικός πίνακας.

ΖΗΤΗΜΑ2ο Α. α) Έστω μια πραγματική συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(\chi)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

β) Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $f'(\chi)=g'(\chi)+\eta\mu^2\chi+e^x$ για $\chi\in[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι $f(0)+g(\chi)<g(0)+f(\chi)$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$.

Β. α) Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=e^{\alpha\chi}$ όπου $\alpha\in R$.Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δυο τιμές της παραμέτρου α έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $f''(\chi)+2f'(\chi)=3f(\chi)$ για κάθε $\chi\in R$

β) Έστω $\lambda,\mu,\beta_1,\beta_2\in R$ με $\beta_1\neq\beta_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=\lambda e^{\beta_1\chi}+\mu e^{\beta_2\chi}$ με $\chi\in R$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός χ_0 τέτοιος ώστε $g(\chi_0)=g'(\chi_0)=0$ Να αποδειχθεί ότι λ=μ=0.

ΖΗΤΗΜΑ3ο Α. α) Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο R και $f(\chi)=\int_0^\chi(\chi-t)g(t)dt$ Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα όταν $g(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in R$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(\chi)=\sqrt{\chi}$ και $f(\chi)=2\chi-1$ και την ευθεία

$\chi=0$.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{1+\chi^2}+\lambda\chi$,$\lambda\in R$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}=1$

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\frac{x}{f^2(x)}dx$.

ΖΗΤΗΜΑ4ο Α. α) Δίνεται ο πίνακας $X=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ όπου α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με α+β=1 . Να αποδειχθεί ότι $X^2=\begin{bmatrix}\gamma & \delta\\ \delta & \gamma\end{bmatrix}$ όπου γ,δ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γ+δ=1.

β) Έστω ότι Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και Α,Β ενδεχόμενα του Ω

Θεωρούμε του πίνακες $Y=\begin{bmatrix}P(A) & P(A')\\ P(A') & P(A)\end{bmatrix}$ και $Y^2=\begin{bmatrix}P(B) & P(B')\\ P(B') & P(B)\end{bmatrix}$ όπου A' είναι το συμπληρωματικό σύνολο του Α και B' το συμπληρωματικό σύνολο του Β. Αν $P(B')=\frac{4}{9}$ και $P(A)<P(A')$ τότε να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α και A'.

Β. Έστω ότι f(t) είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή t όπου t≥0 και $f:[0,+\infty)\to R$ είναι πραγματική συνάρτηση με $f(\sqrt{t})=1-2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$

Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το 1/16 του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_o=0$.