Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (26/6/96)

ΖΗΤΗΜΑ1ο

Α. Δίνονται οι νχν Πίνακες Α,Β,Γ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις Α+Β+1996ΑΒ=Ο ,Β+Γ+1996ΒΓ=Ο ,Γ+Α+1996ΓΑ=Ο ,όπου Ο ο μηδενικός πίνακας. α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες Ι+1996Α ,Ι+1996Β και Ι+1996Γ είναι αντιστρέψιμοι και ότι ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ, όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας.
β) Να αποδείξετε ότι Α=Β=Γ.

Β. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $z = 3 + i\sqrt{3}$ από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^6 = 64$.

ΖΗΤΗΜΑ2ο

Α. α) Να αποδείξετε ότι , αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi\in\Delta$ είναι $f'(\chi)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

β) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο R. Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f'=g$, $g'=-f$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς.

Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις $f''+f=g''+g=0$ και ότι η συνάρτηση $h=f^2+g^2$ είναι σταθερή.

Β Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f και g. Να αποδείξετε ότι αν χ_1 και χ_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in(\chi_1,\chi_2)$ τότε η g έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (χ_1,χ_2).

ΖΗΤΗΜΑ3ο Α. Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$. α) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημορίου τέμνει την έλλειψη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

β) Έστω Α το σημείο του πρώτου τεταρτημορίου στο οποίο η ευθεία $\psi=\lambda\chi$, $\lambda>0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη. Αν μ είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Α τότε να εκφράσετε το γινόμενο λμ ως συνάρτηση των ημιαξόνων α ,β.

Β. Να αποδείξετε τις ανισότητες: α) $\eta\mu\chi < 2\chi$, $\chi > 0$ β) $\eta\mu\chi > \chi - \frac{\chi^3}{3}, \chi > 0$.

ΖΗΤΗΜΑ4ο Α. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $\int_0^1 e^{1-x} f(x)dx = f(x) + e^x, \forall x \in R$.

Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι $f(\chi) + f(\alpha+\beta-\chi) = c$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi = (\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta)).$$