Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης (24/6/95)

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Αν για τους νxν πίνακες Α,Β ισχύει $A^2+2B=2AB$ και ο Β αντιστρέφεται να αποδείξετε ότι :

α) Ο πίνακας Α αντιστρέφεται

β) $2(A^{-1})^2+B^{-1}=2A^{-1}$

Β. Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα 3x3 με πραγματικούς συντελεστές και με αγνώστους $\chi,\psi,\omega\in\mathbb{R}$. Έστω D η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος και D_χ,D_ψ,D_ω οι ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν αντικαταστήσουμε την $1^η$, $2^η$ και $3^η$ στήλη αντίστοιχα με την στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Υποθέτουμε ότι $\kappa\lambda D=\kappa D_\chi+2\lambda D_\psi+(\kappa+2\lambda)D_\omega$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}^*$ Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το σύστημα έχει την μοναδική λύση (χ_0,ψ_0,ω_0) τότε $\kappa(\chi_0+\omega_0)+2\lambda(\psi_0+\omega_0)=\kappa\lambda$

β) Αν το σύστημα είναι ομογενές τότε έχει και μη μηδενικές λύσεις.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Δίνεται ο αντιστρέψιμος 2x2 πίνακας Α και ο $B=\begin{bmatrix}\alpha-\beta+\gamma & 0\\ \alpha-3-\gamma & \beta+\gamma\end{bmatrix}$ Αν AB=0 να βρεθούν τα α,β,γ.

Β. Έστω Ω το σύνολο των ριζών της εξίσωσης

$$\left(\chi^2+4\chi-5\right)\left(\chi-7\right)=0$$

Υποθέτουμε ότι Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases}\left(\alpha-1995\right)\alpha\chi+\psi=0\\ \left(\alpha-1995\right)\left(2\alpha-7\right)\chi+\left(\alpha-6\right)\psi=0\end{cases}$

όπου $\alpha\in\Omega$. Έστω $A\subseteq\Omega$ είναι το ενδεχόμενο το παραπάνω σύστημα να έχει και μη μηδενικές λύσεις. Να βρεθεί η πιθανότητα P(A).

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $\chi_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(\chi_0)=\eta$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^4-2\chi^2+\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}$

i) Αν $A(\chi_1,f(\chi_1))$, $B(\chi_2,f(\chi_2))$, $\Gamma(\chi_3,f(\chi_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $\chi_1<\chi_2<\chi_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

ii) Αν $0<\alpha<1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (-1,0).

Β. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f'(\chi)\neq0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(\chi)f'(\chi)=2f(\chi)$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(\chi_0,f(\chi_0))$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g

στο σημείο $B(\chi_0, g(\chi_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi-2\chi+5=0$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t)=\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}, \qquad t\geq 0$$ όπου A ένας θετικός αριθμός.

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t) από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t)=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}, \qquad t\geq 0$ και υποθέτουμε ότι K(0)=0.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

Β. Αν $G(\chi)=\int_1^{\chi} f(t)dt$ όπου $f(t)=\int_1^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ και $\chi>0$, $t>0$ να βρείτε :

α) την $G''(1)$

β) το $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{\sqrt{\chi}\cdot G''(\chi)-\sqrt{3}}{\sqrt{\chi+1}-1}$