Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (23/6/94)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=2\chi^2$,$\chi\in R$

α) Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha,8\alpha^2)$ $\alpha>0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C, την ευθεία ε και τον άξονα ψ΄ψ.

β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία ΜΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται ($\alpha>0$).

Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,e] με $0<f(\chi)<1$ και $f'(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[1,e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $\chi_0\in(1,e)$ τέτοιος ώστε

$f(\chi_0)+\chi_0\cdot\ln\chi_0=\chi_0$

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων

$\left(z^2+1\right)^2+z^3+z=0$ και $z^{16}+2z^{14}+1=0$.

Β. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z,w και w_1, τέτοιους ώστε $w=z-zi$ και $w_1=\frac{1}{\alpha}+\alpha i$, $\alpha\in R^*$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο R* και ισχύει $w=\overline{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Έστω ρ πραγματικός αριθμός , $A(\chi)$,$B(\chi)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(\rho)\neq 0$ και το $A(\chi)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο f(x) τέτοιο ώστε

$A(\chi)\cdot B(\chi)=(\chi-\rho)^2\cdot f(\chi)$, αν και μόνο αν $A(\rho)=A'(\rho)=0$.

Β. Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ,λ για τις οποίες το πολυώνυμο

$Q(\chi)=\chi^{\nu}(\nu\chi^3+\kappa\chi^2+\lambda\chi+8)$ έχει παράγοντα το $(\chi-2)^2$.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο E(p/2,0) και διευθετούσα την ευθεία $\delta:\chi=-\frac{p}{2}$ είναι

$\psi^2=2p\chi$.

Β. Έστω ν θετικός ακέραιος και $\Omega=\{0,1,2,3,\ldots,2\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος. Δίνονται οι πιθανότητες

$P(\kappa)=\frac{1}{2^{\kappa}}$ για $\kappa=1,2,3,\ldots,2\nu$

Να υπολογίσετε :

α) Την πιθανότητα P(0)

β) Την πιθανότητα P(A) του ενδεχομένου $A=\{2,4,6,\ldots,2\nu\}$