Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης (1993)

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ και ο αντιστρέψιμος $\Gamma=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Να υπολογίσετε το α ώστε $\Gamma^{-1}A\Gamma=B$.

Β. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ ώστε $A^2=5I$ όπου I μοναδιαίος.

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε να υπολογίσετε τους $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A^6=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}250\\ -375\end{bmatrix}$.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+3x+\mu$, $x,\mu\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα (1,2)

Β. Αν η συνάρτηση g(x) έχει συνεχή παράγωγο στο [0,1] και ικανοποιεί την σχέση $\int_0^1 xg'(x)dx=1993-\int_0^1 g(x)dx$ να βρείτε το g(1).

ΖΗΤΗΜΑ3 Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από την συνάρτηση $K(x)=\frac{\alpha x^3}{4}$ όπου x>0 και $\alpha\in[\frac{2}{9},\frac{9}{2}]$. Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=x^2$, x>0 και το κέρδος από την συνάρτηση $f(x)=E(x)-K(x)$, x>0.

α) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος που συμβολίζεται με M(α).

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in[\frac{2}{9},\frac{9}{2}]$ για την οποία το M(α) γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο κέρδος.

ΖΗΤΗΜΑ4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\nu x}$, $x\in\mathbb{R},\nu\in\mathbb{N}^*$

Α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f, να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της

Β. Να αποδείξετε ότι $2\le e^2\nu^2\cdot\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx\le e$.