Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (24/6/93)

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

β) Αν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$

Β. Για τον αντιστρέψιμο πίνακα Α τύπου νxν ορίζουμε τα πολυώνυμα $f(x)=|A-xI|$, $g(x)=|A^{-1}-xI|$ όπου I ο μοναδιαίος πίνακας νxν και x πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι αν $f(x_0)=0$ τότε α) $x_0\neq 0$

β) $g(\frac{1}{x_0})=0$

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$, $z\in\mathbb{C}$ και $Re(z)\neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι : $f(-\frac{1}{\bar{z}})=f(z)$

β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία M(x,y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί z=αx+βyi με $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$ και $\alpha\beta x\neq 0$ ικανοποιούν την σχέση $Re[f(z)]=0$

Β. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$ και το σημείο Κ (0,2β) . Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ και τέμνει τις εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονά της στα σημεία Μ και Ν.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΜΝ ως συνάρτηση του λ.

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε

α) Υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M(\beta-\alpha).$$

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)(\beta-\alpha).$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+4$ με $x>0$

α) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης f

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1} f(t)dt$

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως . Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα v=2 m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση s(t)=vt, $t\in[0,5]$ όπου t ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα)

α. Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(t) του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου.

β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΑ είναι 6m;

Β. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

: $\int_{\alpha}^{x} e^{-t}f(t)dt = e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x),\ x,\alpha\in\mathbb{R}$