Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (21/6/91)

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και V_κ ένας υπόχωρός του ο οποίος παράγεται από κ διανύσματα του V. Από τα κ αυτά διανύσματα υπάρχουν ρ γραμμικώς ανεξάρτητα $1 \le \rho \le \kappa$ τα οποία μαζί με καθένα από τα υπόλοιπα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε να αποδειχθεί ότι ο V_κ έχει διάσταση ρ.

Β. Αν $\omega = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \ne \alpha i$ τότε να αποδειχθεί ότι :

α) ο ω είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνον αν ο z είναι φανταστικός αριθμός.

β) ισχύει $|\omega| = 1$ αν και μόνον αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Έστω (α_ν) ακολουθία συγκλίνουσα με $\lim \alpha_\nu \ne 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε $\alpha_{\nu+\kappa} \ne 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

β) για το παραπάνω κ η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}}$ είναι φραγμένη.

Β. Έστω β πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας.

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = \beta^{\frac{1}{\beta}}$ και $\alpha_{\nu+1} = \left(\beta^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\alpha_\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Να αποδείξετε ότι :

α) η ακολουθία (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα

β) η ακολουθία (α_ν) είναι φραγμένη άνω από το β.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ τότε

α) να αποδείξετε ότι για κάθε ν>2 ισχύει $I_\nu = \dfrac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$.

β) να υπολογίσετε το I_5.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=4.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω

έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία x-y+1=0.

Β. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$ και στην παραβολή $y^2 = 3x$