Θέματα Μαθηματικών 4ης Δέσμης 1990

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Αν Α είναι πίνακας νχν και υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α,β,γ με $\gamma \neq 0$ για τους οποίους ισχύει ότι: $\alpha A^3 - \beta A + \gamma I = O$ όπου I,O ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας νχν αντιστοίχως να αποδείξετε ότι Α είναι αντιστρέψιμος .

Β. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ και I,O ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας 2x2 αντιστοίχως να βρείτε όλες τις τριάδες (κ,λ,μ) πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει ότι : $\kappa A^2 + 3\lambda A - \mu I = O$.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Να αποδείξετε ότι : Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ τότε (fg) είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και είναι

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό και ισχύει g(-1)=7. Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(x) = 3(x-2)^2 \cdot g(2x-5)$ να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε την $f''(2)$.

ΖΗΤΗΜΑ3 Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + \left(\alpha^3 + 7\right)x - 5\alpha^2.$$ Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$ με α<β. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$.

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = x^2 e^x$ του άξονα $x'x$ και των ευθειών με εξισώσεις x=1 και x=3.