Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1987

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. i) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ του επιπέδου .Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

ii) Να αποδειχθεί ότι δυο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Β. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνονται τα σημεία A(4,2) και B(3,-5) . Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση 7x+y-23=0. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Αν $\left\{v_1,v_2,v_3,...v_\rho\right\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V τότε να αποδειχθεί ότι κάθε διάνυσμα $v\in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής του V.

Β. Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ $V=\left\{\left(\alpha,\alpha-\beta,2\alpha+3\beta\right):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$. Να αποδειχθεί ότι το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάστασή του.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Αν $\lim\alpha_\nu=+\infty$ η $-\infty$ και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ειναι $\alpha_\nu\neq 0$ να αποδειχθεί ότι $\lim\frac{1}{\alpha_\nu}=0$.

Β. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\left(\alpha_\nu\right)$ με

$$\alpha_\nu=\left(\sqrt{7\nu^4+6\nu+5}-\sqrt{7\nu^4+3\nu+3}\right)\left(\sqrt{63\nu^2-5\nu+20}\right)$$

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Αν η f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Δ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0\in\Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε να αποδειχθεί ότι $f'(x_0)=0$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4-14x^2+24x$. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν τρία σημεία $A,B,\Gamma\in C$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα A,B,Γ είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$. Να αποδειχθεί ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.