Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1986

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ που ανήκουν στο Ε . Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

α) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα;

β) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα;

Β. Να αποδείξετε ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε επίσης και τα διανύσματα

$$\vec{u}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

$\vec{v}=2\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$ είναι

$$\vec{w}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. i) Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού.

ii) Έστω οι μη μηδενικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να αποδείξετε ότι $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Β. Έστω ότι $z=(2x-3)+(2y-1)i$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Να ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) που είναι τέτοια ώστε $|2z-1+3i|=3$ είναι κύκλος. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου αυτού και την ακτίνα του.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και έστω $x_0\in\Delta$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0

ii) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής από δεξιά στο x_0

iii) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής από αριστερά στο x_0

Β. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}3\alpha e^{x+1}+x & \text{αν } x\le -1\\ 2x^2-\alpha x+3\beta & \text{αν } -1<x<0\\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1 & \text{αν } 0\le x\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β) και ότι στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'(x_0)=0$. Η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο αν :

$\forall x\in(\alpha,x_0],\ f'(x)\ge 0$ και $\forall x\in[x_0,\beta),\ f'(x)\le 0$.

Β. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=(\alpha-\frac{2}{3})x^3-(\alpha+\frac{1}{2})x^2-10x+7,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0=\frac{3}{2}$.

Μετά για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της f.