Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1984

ΖΗΤΗΜΑ1 α) Έστω ότι $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι τα διανύσματα (α_1, α_2), (β_1, β_2) αντίστοιχα (ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς) και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ το εσωτερικό τους γινόμενο. Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$.

β) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xoψ θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α το σημείο (2,1) και έστω ότι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δυο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις 3x+ψ-11=0, x-ψ+3=0. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

ΖΗΤΗΜΑ2 α) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0 < |\alpha| < 1$, να αποδείξετε ότι $\lim \alpha^{\nu} = 0$.

β) Να μελετήσετε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία (β_ν) με

$$\beta_\nu = \frac{\lambda^\nu + 2^{\nu+1}}{2 \cdot \lambda^\nu - 3 \cdot 2^{\nu-1}}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, -2.$$

ΖΗΤΗΜΑ3 α) Δίνονται τα σύνολα διανυσμάτων B_1, B_2 του χώρου $\mathbb{R}^2$ με

$B_1 = \{(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta), (\eta\mu\theta, -\sigma\upsilon\nu\theta)\}$

$B_2 = \{(\sigma\upsilon\theta - \eta\mu\theta, -\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta), (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)\}$ με

$\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το καθένα από τα σύνολα B_1, B_2 είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ (για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$)

β) Έστω $\theta = \frac{\pi}{4}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα (και μόνο) διάνυσμα (x,y) του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε τα διατεταγμένα ζεύγη των συντεταγμένων να είναι (λ,μ-1) και (λ-1,μ) ως προς τις βάσεις B_1, B_2 αντίστοιχα.

ΖΗΤΗΜΑ4 Έστω z ο μιγαδικός αριθμός x+yi με $y \neq 0$ ($x,y \in \mathbb{R}$). Θέτουμε :

$\omega = \frac{\bar{z}^2}{z-1}$ όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z. Να αποδείξετε ότι ω είναι πραγματικός αριθμός εάν και μόνο εάν το σημείο (x,y) ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xoy , ανήκει σε μία υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.