Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1983

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. α) Αν $(\alpha_\nu),(\beta_\nu)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών με :
$\lim \alpha_\nu = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim \beta_\nu = \beta \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι :
$\lim(\alpha_\nu \beta_\nu) = \alpha\beta$.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (γ_ν) με :
$\gamma_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}}\left(\sqrt{\nu^2+1}-\nu\right)$

ΖΗΤΗΜΑ2 Η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α,β) και f(α)=f(β)=0. Να αποδειχθεί :

α) Ότι για τη συνάρτηση : $F(x) = \dfrac{f(x)}{x-c}$ όπου $c \notin [\alpha,\beta]$ υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.

β) Αν $c \notin [\alpha,\beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση y=f(x) διέρχεται από το σημείο (c,0).

ΖΗΤΗΜΑ3 Α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε x>0 ισχύει η σχέση $\log x \le |x-1|$

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\log x}{1-x}, & 0 < x \ne 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

. Να αποδειχθεί ότι

i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
ii) Είναι φθίνουσα στο διάστημα (0,1)
iii) $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

ΖΗΤΗΜΑ4 Στο τετράεδρο ΟΑΒΓ να αποδειχθεί ότι

α) Αν $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A} = 0$ τότε $\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

β) Αν $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και d_1 είναι η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ,ΓΑ και d_2 είναι η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΓ,ΑΒ τότε $d_1 = d_2$.