ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ • Τεύχος 99 • Τρίτη 13 Φεβρουαρίου 2001

αφιέρωμα

ΘΕΩΡΙΑ & ΠΡΑΞΗ

Εν αρχή ην τα Μαθηματικά

αφιέρωμα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

Του ΑΝΤΩΝΗ ΣΚΟΡΔΙΛΗ

Η σχέση των Μαθηματικών με το σύνολο των λοιπών επιστημών είναι σχέση διαρκούς αλληλεπίδρασης.

Σε άμεση επικοινωνία με τις δημιουργούμενες ανάγκες, η μαθηματική επιστήμη, κάνει φανερή την αξία της στο κοινωνικό σύνολο όχι καθ' εαυτή, αλλά μέσα από τις εφαρμογές της.

Ο στόχος –συνεπώς– της διάχυσης της μαθηματικής σκέψης στη μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα, ο οποίος επιλέχτηκε από τη μαθηματική κοινότητα για να εκφράσει συνολικά το στίγμα της στην αρχή της νέας χιλιετίας, ξεπερνά κατά πολύ τα στενά όρια της εκπαιδευτικής, μαθηματικής διδασκαλίας.

Δεν αρκεί η λογική, για την προσέγγιση της μαθηματικής σκέψης. Απαιτείται και η φαντασία. Ή αλλιώς, δεν νοείται η κατανόηση των Μαθηματικών, αν δεν καταστεί κοινή αντίληψη ότι η μαθηματική μεγαλοφυΐα δεν είναι παρά μια πλευρά της μεγαλοφυΐας στη Φιλοσοφία.

Η Φυσική αποτέλεσε το βασικό κίνητρο ανάπτυξης των μαθηματικών θεωριών. Πληθώρα φυσικών προβλημάτων έγιναν αφορμή ανάπτυξης μιας μαθηματικής θεωρίας και, αντίστροφα, μαθηματικές αναλύσεις προτύπων επεξήγησαν φυσικά φαινόμενα.

Από κει και πέρα:

Στη θεωρητική Χημεία (κυρίως Φυσικοχημεία, Κβαντική Χημεία), πολλές χημικές διαδικασίες αναλύονται με μαθηματικά μοντέλα.

Στη Βιολογία, η ανάλυση μαθηματικών μοντέλων εξυπηρετεί τις μελέτες πληθυσμιακών μεταβολών των μικροοργανισμών, το βιολογικό ανταγωνισμό των ειδών, τη δυναμική πολλαπλασιασμού καρκινοπαθών κυττάρων και πλείστες άλλες εφαρμογές.

Αντίστοιχες χρήσεις, μέσω κυρίως των διαφορικών εξισώσεων, αποτελούν τη βάση της ιατρικής έρευνας, ειδικότερα δε της Φυσιολογίας. Τρανταχτό παράδειγμα αποτελεί η χρήση των Μαθηματικών για την κατανόηση της ανοσιολογικής δύναμης του HIV και η προσπάθεια παρουσίασης αναφορών μαθηματικού μοντέλου για το AIDS.

Στην Κοινωνιολογία, τα προβλήματα μίξης και αλληλεπίδρασης πληθυσμών, η θεωρία της μάθησης, η διάδοση φημών, η βελτίωση της στρατηγικής ή η δυναμική ευστάθεια των εξοπλισμών δεν είναι παρά τυπικές μαθηματικές εφαρμογές.

Αντίστοιχα, τόσο η προστασία του περιβάλλοντος και η διαχείριση οικοσυστημάτων (μοντέλα ασφάλειας αποθήκευσης ατομικών υπολειμμάτων, μελέτη ατμοσφαιρικού και υγρού περιβάλλοντος κ.λπ.) όσο και η Οικονομία (ανάλυση οικονομικών θεωριών, μελέτη σύγχρονων γεωργικών μεθόδων, τεχνολογικές εφαρμογές βιομηχανίας κ.λπ.) αποτελούν πεδία χρησης των εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

DAVID SMITH

Ολη αυτή η πραγματικότητα κωδικοποιείται απόλυτα στις ημέρες μας, μέσω της τεράστιας σχέσης που υπάρχει μεταξύ Μαθηματικών και Πληροφορικής, που αθροιστικά πια αποτελούν το λειτουργικό υπόβαθρο όλης της επιστημονικής διαδικασίας. Αρκεί να πούμε ότι όλο το οικοδόμημα λειτουργίας του υλικού (hardware) των υπολογιστών τα γραφικά των υπολογιστών δηλαδή, η δημιουργία, επεξεργασία και αποθήκευση μοντέλων αντικειμένων, έχει χτιστεί με βάση την Αλγεβρα Boole. Ή ακόμα, ότι ένας σημαντικός κλάδος της Πληροφορικής, αυτός των Σχεσιακών Βάσεων Δεδομένων, στηρίζεται στη Relation Αλγεβρα.

Ή, τέλος, ότι δύο μεγάλες κατηγορίες γλωσσών προγραμματισμού (λογικός - συναρτησιακός προγραμματισμός) ευθέως πηγάζουν από τους αντίστοιχους μαθηματικούς κλάδους.

Τι, τελικά, σημαίνουν όλα τα ανωτέρω;

Τίποτα περισσότερο, τίποτε λιγότερο από το γεγονός ότι τα Μαθηματικά βρίσκονται... παντού.

Και τι είναι, τελικά, η μαθηματική σκέψη;

Τίποτε περισσότερο, τίποτε λιγότερο από την ανταμοιβή κάθε ευφυούς ανθρώπου, που θα συλλάβει κάτι από το εσωτερικό τους νόημα.

Διότι (παραφράζοντας τα λόγια του καθηγητή W. T. Tutte), τα Μαθηματικά, πέρα από τέχνη που πλάθει δομές αιθερικής ομορφιάς από την πρωταρχική ύλη που ονομάζεται λογική, είναι... ευχαρίστηση.

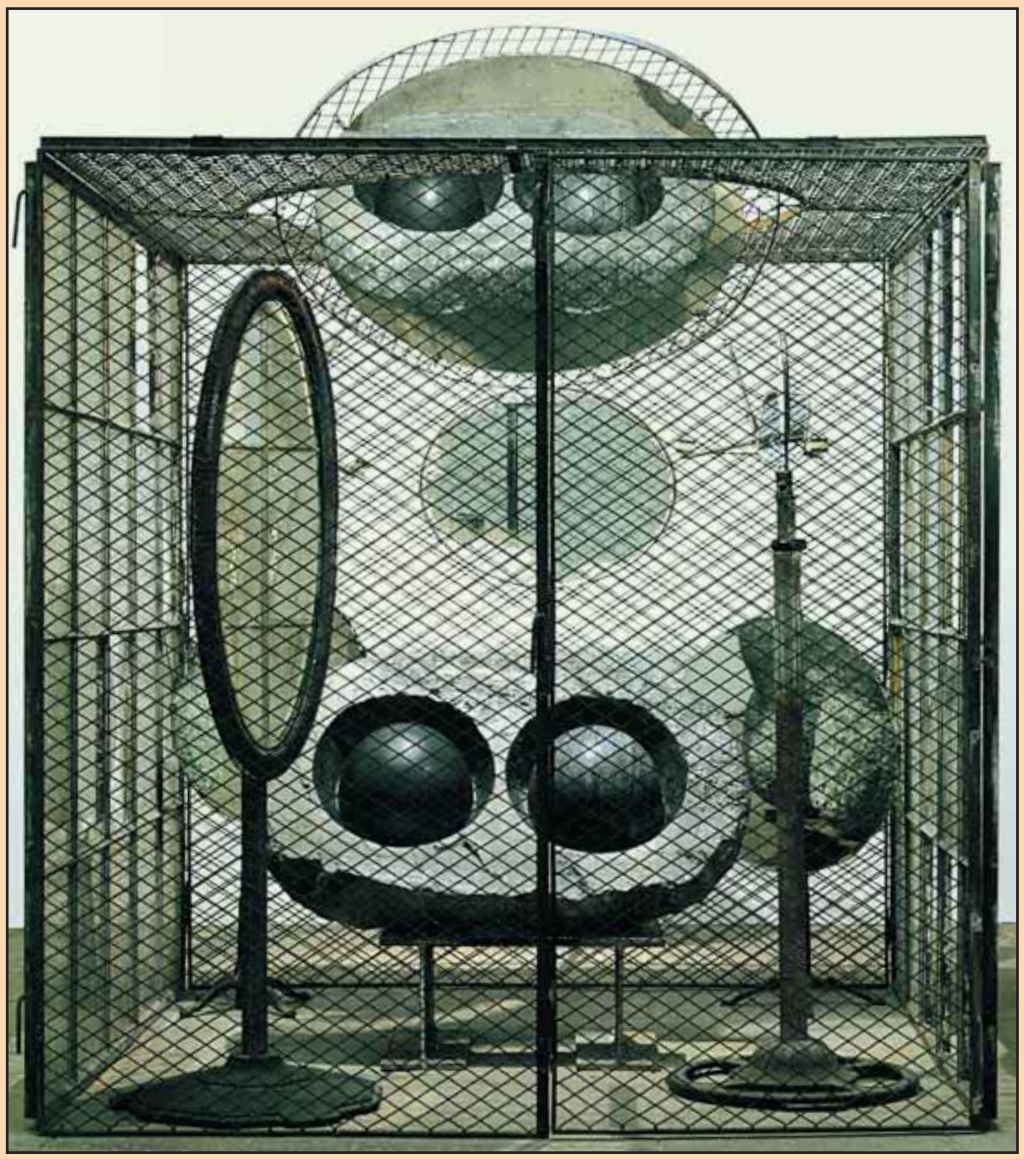
Αυτός είναι και ο πρώτος στόχος του παρόντος αφιερώματος.

Επιλέγοντας κάποιες από τις άπειρες «θεματολογίες» που σχετίζονται με τα Μαθηματικά, να ανοίξουμε κάποιους δρόμους σε όποιους θελήσουν κάποια στιγμή να... αναζητήσουν αυτήν την ευχαρίστηση. Σε όσους θελησουν –κάποια στιγμή– να αναζητήσουν τη μαθηματική σκέψη...

Η πεμπτουσία των επιστημών

αφιέρωμα: ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ: **ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ**
ΣΥΝΤΑΞΗ ΥΛΗΣ: **ΝΑΣΟΣ ΓΚΟΛΕΜΗΣ** ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ: **ΠΑΝΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ** ΠΑΡΑΓΩΓΗ: **ΦΩΤΟΕΚΔΟΤΙΚΗ Α.Ε.**
ΕΞΩΦΥΛΛΟ: **ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΜΑΛΑΞΙΑΝΑΚΗΣ**

Ο ρόλος των Μαθηματικών στην κοινωνία. Η αξία αλλά και το πλήθος εφαρμογών τους



LOUISE BOURGEOIS

Τα Μαθηματικά, κλειδί ανάπτυξης

Του Ν. ΑΛΕΞΑΝΔΡΗ*

Το 1900 στο Παρίσι, στο 2ο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο, ο μεγάλος μαθηματικός David Hilbert παρουσίασε τον περίφημο κατάλογο με τα ανοικτά προβλήματα που επηρέασαν την εξέλιξη των Μαθηματικών στον 20ό αιώνα.

Ο κατάλογος αυτών των 23 προβλημάτων δημιούργησε, αμέσως μετά τη διατύπωσή του, τους στόχους της διεθνούς μαθηματικής κοινότητας του 20ού αιώνα και οι αναφορές στα θρυλικά αυτά προβλήματα γίνονται σχεδόν πάντα με τον αριθμό που κατέλαβαν στη διατύπωση του Hilbert.

Οι μαθηματικοί γνωρίζουν ότι, για παράδειγμα,

—το πρώτο πρόβλημα αποτελεί «Η απόδειξη της υποθέσεως του συνεχούς»,

–το δεύτερο «Η συμβατότητα των αριθμητικών αξιωμάτων»,

—το έκτο «Η αξιωματικοποίηση των φυσικών επιστημών»,

—το εικοστό «Η διερεύνηση του γενικού προβλήματος συνοριακών τιμών για μερικές διαφορικές εξισώσεις»,

—το εικοστό τρίτο «Η ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας για τη θεωρία των Μεταβολών».

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι ακόμα και σήμερα δεν έχουν επιτευχθεί πλήρως και οι 23 στόχοι, παρ' όλο που η εντατική τους μελέτη άνοιξε πολλές λεωφόρους της μαθηματικής επιστήμης. Για παράδειγμα, το όγδοο πρόβλημα που αφορά την κατανομή των πρώτων αριθμών στην πραγματική ευθεία, παραμένει άλυτο, όπως παραμένουν άλυτα και άλλα προβλήματα.

Ετσι και τώρα, 100 χρόνια μετά, η Διεθνής Μαθηματική Ενωση θέλησε με την ευκαιρία της νέα χιλιετίας να προβάλει σε παγκόσμια κλίμακα το ρόλο των Μαθηματικών, ανακηρύσσοντας το έτος 2000 ως Παγκόσμιο Ετος των Μαθηματικών. Με την ενέργεια αυτή θέλησε να σηματοδοτήσει τη σπουδαιότητα της επιστήμης των Μαθηματικών στη σύγχρονη κοινωνία και να καθορίσει τη σημασία τους στην 3η χιλιετία.

Ο ρόλος των Μαθηματικών στην κοινωνία σήμερα δεν είναι γενικά αναγνωρισμένος για την αντιμετώπιση των καθημερινών της αναγκών, αλλά πολύ συχνά παραμένει κρυμμένος σε τεχνολογικά και επιστημονικά επιτεύγματα. Η κοινωνία μας σήμερα αντιλαμβάνεται την αξία των Μαθηματικών όχι καθεαυτή, αλλά μέσα από τις εφαρμογές τους. Και επειδή όλοι αντιλαμβανόμαστε εύκολα την άμεση σχέση των Μαθηματικών με τις θετικές καλούμενες επιστήμες και τις εφαρμογές τους, όπως είναι η φυσική, η μηχανική, η ηλεκτρονική, η διαστημική, η χημεία, η βιολογία, κάποιες αναφορές και παραδείγματα σε κάποιες άλλες επιστήμες και εφαρμογές τους είναι απαραίτητες για να τονιστεί το ευρύ φάσμα της προσφοράς των Μαθηματικών σε άλλους χώρους.

Για παράδειγμα, στην Ιατρική και ειδικότερα στη Φυσιολογία, τα Μαθηματικά και συγκεκριμένα οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της γλυκόζης στο αίμα και τη διάγνωση του διαβήτη, για τη μελέτη της διάδοσης των σημάτων μέσα στο νευρικό σύστημα του ανθρώπου, για την ενεργειακή διαπερατότητα του κερατοειδούς χιτώνα, για τη ρευστοδυναμική της αρτηριακής και φλεβικής κυκλοφορίας του αίματος (δημιουργία θρόμβων) κ.λπ. Επίσης θα πρέπει να αναφερθεί ότι τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται για την κατανόηση της ανοσολογικής δυναμικής του ιού HIV, καθώς και ότι έχουν κατασκευαστεί μαθηματικά μοντέλα για το AIDS.

Πού βοήθησαν σε Ιατρική, ψηφιακή τεχνολογία

Στην Κοινωνιολογία, τυπικές εφαρμογές των Μαθηματικών αποτελούν τα προβλήματα μίξης και αλληλεπίδρασης των πληθυσμών με διαφορετικό κοινωνικό υπόβαθρο, η θεωρία της μάθησης, η διάδοση φημών, η βελτίωση της στρατηγικής κατά τη διεξαγωγή ενός αθλητικού αγώνα, οι πολιτικές αλληλεπιδράσεις των κοινωνικών ομάδων, η δυναμική ευστάθεια των εξοπλισμών των διάφορων χωρών, κ.λπ.

Η προστασία του περιβάλλοντος και η διαχείριση οικοσυστημάτων απαιτούν Μαθηματικά. Υπάρχουν μοντέλα για την ασφάλεια κατά την αποθήκευση υπολειμμάτων ατομικών εργοστασίων, για τη μελέτη του ατμοσφαιρικού και υγρού περιβάλλοντος, για την ανάλυση των προτύπων οδικής κυκλοφορίας, κ.λπ.

Είναι γνωστό ακόμη ότι τα προβλήματα παιγνίων (κύβων, παιγνιόχαρτων, σκακιού κ.λπ.) είχαν προκαλέσει το ενδιαφέρον μεγάλων μαθηματικών, η δε θεωρία των παιγνίων επιτρέπει τη μελέτη, ανάλυση και λήψη αποφάσεων σε καταστάσεις συγκρούσεως συμφερόντων.

Ετσι, στην περίπτωση των οικονομικών συμφερόντων, η θεωρία των παιγνίων αποτέλεσε τη βάση για τη μελέτη προβλημάτων ολιγοπωλίου, διμερούς μονοπωλίου, γενικής ισορροπίας, οικονομικών διακυμάνσεων κ.λπ.

Η θεωρία των παιγνίων προσέφερε πολλά και στη μελέτη των πολιτικών και στρατηγικών προβλημάτων, αφού έννοιες, όπως προτίμηση, χρησιμότητα, συμμαχία, συνεργασία, επικράτηση, απειλή, διαπραγματεύσεις, πόλωση κ.λπ. μπορούν να περιγραφούν με τη γλώσσα των Μαθηματικών και να δώσουν σαφή κριτήρια στους ηγήτορες για τη λήψη των αποφάσεων.

Κάτι λιγότερο γνωστό είναι ότι ο καινούργιος κλάδος των κυματοδηγών (wavelets) έδωσε ένα καινούργιο εργαλείο, το οποίο υιοθέτησε το FBI για την αρχειοθέτηση των δακτυλικών αποτυπωμάτων.

Επίσης, μια και ζούμε στην κοινωνία της πληροφορίας, πρέπει να αναφέρουμε ότι και πάλι τα Μαθηματικά είναι εκείνα τα οποία ως επιστήμη έδωσαν τη δυνατότητα ανάπτυξης της Πληροφορικής Τεχνολογίας και των Επικοινωνιών.

Ο **Wiener** με τη θεμελίωση της θεωρίας των Αυτομάτων και της Θεωρίας των

Από τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά στη Λύση Προβλήματος

Του ΝΙΚΟΥ ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΥ*

Οι πρώτες αναφορές στη διδασκαλία των πραγματικών προβλημάτων και των εφαρμογών επισημαίνονται στη «Βίβλο» των Νέων Μαθηματικών (New Mathematics), ένα ιστορικό κείμενο που σηματοδότησε την κυριαρχία της έννοιας της μαθηματικής δομής στα σχολικά Μαθηματικά. Οι αναφορές γίνονται από τον **Albert Tucker** και επικεντρώνονται στη διδασκαλία εκείνων των Μαθηματικών που επιτρέπουν να φανούν οι εφαρμογές τους. Προφανώς, η όλη εισήγηση ήταν τελείως αντίθετη με το «κλίμα» της εποχής, γι΄ αυτό και δεν της δόθηκε προσοχή. Το ίδιο ακριβώς συνέβη και με τις εισηγήσεις του συνεδρίου της Utrecht το 1967. Στο συνέδριο αυτό ο **Freudenthal** (1968) επισημαίνει ότι «...η διδασκαλία των Μαθηματικών εντελώς θεωρητικά, χωρίς αναφορά και συσχέτιση με τις εφαρμογές τους αλλά με την "κρυφή ελπίδα" ότι οι μαθητές θα είναι ικανοί να τα χρησιμοποιήσουν όποτε χρειαστεί, αποδείχτηκε μάταιος κόπος». Στο ίδιο συνέδριο ο **Murray Klamkin** (1968) παρουσιάζει μια διάλεξη με τίτλο «Γιατί (πρέπει) να διδάσκουμε τα Μαθηματικά έτσι ώστε να είναι χρήσιμα» και σπεύδει να διευκρινίσει ότι «...το να είναι χρήσιμα δεν σημαίνει τη διδασκαλία εφαρμοσμένων Μαθηματικών αλλά τη διδασκαλία των Μαθηματικών έτσι ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν». Τέλος, ο **Pollak** (1968) επισημαίνει ότι δεν είναι σωστό να θεωρούμε τη διδασκαλία των εφαρμοσμένων Μαθηματικών με διαφορετικό τρόπο από τη διδασκαλία των θεωρητικών. Αν αυτό συμβαίνει, τότε διδάσκουμε τα θεωρητικά Μαθηματικά με κακό τρόπο. Η στάση και για τα δύο θα ΄πρεπε να είναι: «Να μια κατάσταση, σκέψου γι΄ αυτήν».

Προβληματισμοί πάνω στη διδακτική πράξη

Οπως επισημάναμε στην αρχή, η ασυμβατότητα των πανεπιστημιακών σπουδών με τις κοινωνικές ανάγκες στην Αγγλία είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη μαθημάτων (courses) εφαρμοσμένων μαθηματικών. Γρήγορα όμως η κατάσταση έφθασε σε αδιέξοδο. Τα Μαθηματικά ήδη είχαν αρχίσει να χρησιμοποιούνται από πολλές επιστήμες, έτσι ώστε η διδασκαλία των εφαρμογών να δίνει μια πολύ περιορισμένη εικόνα του τρόπου με τον οποίο τα Μαθηματικά εφαρμόζονται σε άλλα επιστημονικά πεδία. Τον πρώτο σημαντικό σταθμό τον επισημαίνουμε το 1970 με το άρθρο των **Ford** and **Hall** (1970). Στο άρθρο αυτό προτείνεται αντί για τη διδασκαλία των εφαρμογών να διδάσκονται οι γενικές αρχές με τις οποίες διαπραγματευόμαστε ένα πραγματικό πρόβλημα, δηλαδή η διαδικασία της μοντελοποίησης να αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας. Την ίδια χρονιά, οι **Hall** and **Whitcobe** (1970) παρουσιάζουν μια σειρά μαθημάτων για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση που βασίζεται στη μοντελοποίηση καθημερινών καταστάσεων. Τη δεκαετία αυτή οι δημοσιεύσεις για τη διδασκαλία της μοντελοποίησης έχουν αυξηθεί σημαντικά. Μια καλή επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας της εποχής αυτής γίνεται από τον Pollak (1979). Το 1977 ο Ιάπωνας **S. Shimada**, θέλοντας να αντιμετωπίσει μερικά σοβαρά προβλήματα της παραδοσιακής διδασκαλίας, εισάγει τον όρο «ανοιχτό πρόβλημα», μέσα στον οποίο συμπεριλαμβάνει και προβλήματα του εμπειρικού - φυσικού Κόσμου. Με άλλα λόγια, από την εποχή αυτή τα πραγματικά προβλήματα αρχίζουν να γίνονται αντικείμενο έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Ο δεύτερος μεγάλος σταθμός, κατά τη γνώμη μας, στην εισαγωγή των προβλημάτων, μαθηματικών και πραγματικών, στη διδακτική πράξη, γίνεται με δύο πολύ γνωστά κείμενα. Το πρώτο είναι «An agenda for Action», NCTM (1980), και «Cockroft Report», HMSO (1982), όπου προτείνουν τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος (Problem Solving) στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Την ίδια περίπου εποχή ο **Schoenfeld** (1985), αφού ήδη έχει επαναφέρει στο προσκήνιο τις ιδέες του **Polya**, αναδεικνύει τις γνωστικές και μεταγνωστικές δυσκολίες που ενυπάρχουν τόσο στη βασική έννοια της Ευρετικής (heuristic) όσο και στην ίδια τη διαδικασία της επίλυσης προβλήματος. Επισημαίνουμε όμως ότι μέχρι την εποχή αυτή έχουμε δύο διαφορετικούς κλάδους που αφορούν στο είδος των προβλημάτων: Την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Mathematical problem solving) και την επίλυση (πιο καλά: τη διαπραγμάτευση) πραγματικών προβλημάτων (Mathematical Modelling and applications ή Applied problem solving).

Από τα μέσα της δεκαετίας του ΄80 και μετά, τα πράγματα εξελίσσονται ραγδαία. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε μια τάση για τη σταδιακή ενοποίηση των δύο αυτών κλάδων, βλέπε π.χ. **Blum** and **Niss** (1989). Κατά τη γνώμη μας, βασικό ρόλο προς την κατεύθυνση αυτή είχε η σταδιακή συνειδητοποίηση της ομοιότητας που παρουσιάζουν οι δύο διαδικασίες. Φυσικά, δεν παραβλέπουμε κάποιες σοβαρές διαφορές, επιστημολογικού κυρίως χαρακτήρα, αλλά δεν θα επιμείνουμε σε αυτές. Το αποτέλεσμα της ενοποιητικής τάσης είναι ότι σήμερα αρκετοί ερευνητές, ανάμεσα σε αυτούς και εμείς, αναφέρονται στη «Λύση Προβλήματος» ως μια ενιαία τάση με δύο κλάδους.

Εξίσου σημαντικός, όμως, ήταν ο μετασχηματισμός του σκοπού και του ρόλου της Μοντελοποίησης και των εφαρμογών, στο ευρύτερο πλαίσιο της ενοποιημένης Λύσης Προβλήματος, ο οποίος άρχισε να σχηματοποιείται την ίδια περίοδο και παγιώθηκε στη δεκαετία του ΄90.

Πιο συγκεκριμένα, στις αρχές της δεκαετίας του ΄60 ο σκοπός ήταν «να διδάξουμε εφαρμογές των Μαθηματικών». Στη δεκαετία του ΄70 ήταν «να δούμε τις γενικές αρχές με τις οποίες διαπραγματευόμαστε τα προβλήματα και τις εφαρμογές, δηλαδή να διδάξουμε τη Μοντελοποίηση». Στις αρχές της δεκαετίας του ΄80 ήταν «να διδάξουμε τη Λύση Προβλήματος» ως μέρος (ιδιαίτερο κεφάλαιο) του Προγράμματος Σπουδών. Στη δεκαετία του ΄90 διαμορφώθηκε το ερώτημα που σήμερα βρίσκεται στην επικαιρότητα και αποτελεί αντικείμενο συστηματικής έρευνας: «Να διδάξουμε Μαθηματικά με την "ενοποιημένη" διαδικασία Λύσης Προβλήματος».

Παρατηρούμε, λοιπόν, μία ανατροπή της φιλοσοφίας, που συνέβη μέσα σε περίπου τριάντα χρόνια. Στις δεκαετίες ΄60 και ΄70, η διδασκαλία των εφαρμογών και της Μοντελοποίησης δεν είχε σχέση με τη διδασκαλία των Μαθηματικών, κάτι που τονιζόταν με έμφαση, βλέπε π.χ. Greenman (1973). Αντίθετα, σήμερα θεωρούμε ότι η εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών διαμέσου διαδικασιών επίλυσης προβλήματος βοηθά στη βαθύτερη κατανόησή τους, βλέπε π.χ. «Holton et al» (1999).

Ο ΝΙΚΟΣ ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΣ *είναι ειδικός σύμβουλος του Τομέα Διδακτικής του Π.Α., σχολικός σύμβουλος*

Πληροφοριών και ο **G. Boole** με την Αλγεβρά του δημιούργησαν το κατάλληλο θεωρητικό περιβάλλον μέσα από το οποίο μπορεί να αναπτύσσεται η ψηφιακή τεχνολογία και να κατασκευάζονται τα ψηφιακά κυκλώματα και οι ψηφιακοί υπολογιστές.

Ακόμη, τις αρχές της θεωρίας πληροφοριών του **Shannon** εφαρμόζουμε σήμερα για να προσδιορίσουμε ποιες πληροφορίες περιέχονται μέσα σε ένα μόριο DNA. Γιατί μπορούμε να βλέπουμε τα γονίδια πρώτα ως πληροφορίες και μετά ως Χημεία. Τα γονίδια γίνονται τότε ένα από τα πολλά διαφορετικά είδη του συστήματος των συμβόλων, όπου περιλαμβάνεται και το τόσο πλούσιο και εκφραστικό σύστημα της ανθρώπινης γλώσσας.

Μία από τις πολλές προκλήσεις για τη μαθηματική επιστήμη τα τελευταία χρόνια ήταν αυτή της εξασφάλισης της ασφαλούς μετάδοσης των πληροφοριών στα δίκτυα των υπολογιστών και το παγκόσμιο Διαδίκτυο. Απαίτηση που γίνεται ιδιαίτερα επιτακτική ύστερα από την ανάπτυξη μιας ποικιλίας εφαρμογών (π.χ. το ηλεκτρονικό εμπόριο, το ηλεκτρονικό χρήμα, οι τραπεζικές συναλλαγές, ο έλεγχος διακίνησης προϊόντων κ.ά.) και τον τεράστιο όγκο ευαίσθητων πληροφοριών, που ανταλλάσσονται μεταξύ διαφόρων οργανισμών μέσω μη ασφαλών δημόσιων δικτύων.

Είναι σημαντικό ότι τα Μαθηματικά μπορούν αποτελεσματικά να αντιμετωπίσουν αυτές τις απαιτήσεις.

Επίσης: Η θεωρία του χάους μελετά τα σύνθετα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα και προσφέρει ένα θαυμάσιο τρόπο προσέγγισης των Μαθηματικών.

Το χάος είναι μια θεωρία η οποία μελετά τις μεταβολές των σύνθετων συστημάτων κατασκευάζοντας μοντέλα φυσικών συστημάτων με βάση τις μαθηματικές έννοιες της αναδρομής, είτε με τη μορφή της αναδρομικής διαδικασίας είτε ενός συνόλου διαφορικών εξισώσεων, και ως τέτοια χρησιμοποιείται προσφέροντας ένα ισχυρό πλαίσιο για την ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης.

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η θεωρία του χάους δεν έχει και πρακτικές εφαρμογές. Οι τεχνικές της θεωρίας του χάους χρησιμοποιούνται σήμερα για την κατανόηση μοντέλων για βιολογικά συστήματα, τα οποία είναι βεβαίως τα πλέον χαοτικά συστήματα που μπορεί να φανταστεί κανείς για τα χρηματοοικονομικά και άλλα φαινόμενα.

Στο 19ο Διεπιστημονικό Συνέδριο με θέμα το χάος, που πραγματοποιήθηκε πριν από τέσσερα χρόνια στο Πανεπιστήμιο Πειραιά, αναπτύχθηκαν, εκτός των άλλων θέματα, όπως Χάος και Δίκαιο, Χάος και Συνταγματική Τάξη, Χάος και Οικονομία, Χρηματιστηριακό Χάος, Χάος και Θέατρο, Χάος και Ποίηση, Χαοτική Πολυπλοκότητα του Αιγαίου, θέματα που καταδεικνύουν την εμπλοκή της Θεωρίας του Χάους στην καθημερινή πραγματικότητα.

Κοινωνιολογία και πολιτικά προβλήματα βρήκαν λύσεις

Ακόμα, θα πρέπει να τονιστεί η αλληλεπίδραση των Μαθηματικών με την Τέχνη, π.χ. Μαθηματικά και Χορογραφία, Γεωμετρία, Προοπτική και Ζωγραφική, Μαθηματικά και Μουσική, Γλωσσολογία και αλλού.

Τέλος, θα μπορούσε κανείς να απαριθμήσει και πολλές άλλες εφαρμογές των Μαθηματικών που άπτονται σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, μέσα από την οποία προκύπτει αβίαστα ο θετικός ρόλος των Μαθηματικών στην κοινωνία και ότι τα Μαθηματικά αποτελούν το κλειδί, τη βάση για πολλές άλλες επιστήμες, τέχνες, εφαρμογές και εφευρέσεις που βελτιώνουν τη ζωή μας και συντελούν στην ανάπτυξη των διαφόρων χωρών. Η οποιαδήποτε λοιπόν επένδυση στα Μαθηματικά μπορεί να θεωρηθεί μέρος μιας επιτυχημένης πολιτικής μιας πολιτείας. Αυτό αντικατοπτρίστηκε πολλές φορές στην ιστορική διαδρομή σε πολιτικές που ακολούθησαν προηγμένες χώρες με εμφανή αποτελέσματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, που όταν διαπίστωσαν την υστέρησή τους στο Διάστημα έναντι της Ρωσίας, μετά την εκτόξευση του Sputnik, έσπευσαν να αναμορφώσουν τα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών στο εκπαιδευτικό τους σύστημα.

Στη σύγχρονη εποχή, όπου η ραγδαία εξέλιξη όλων των επιστημών στηρίζεται σε μέγιστο βαθμό στα Μαθηματικά, χρειάζεται περισσότερο από ποτέ άλλοτε να υπογραμμιστεί ο ρόλος τους και να προβληθεί η χρησιμότητά τους. Να πάψουν να είναι ο αφανής ήρωας των εξελίξεων, να απομυθοποιηθεί η δυσκολία τους και να ανατραπεί η αντίληψη ότι τα Μαθηματικά είναι αποκομμένα από την καθημερινή πραγματικότητα. Αν αυτός ο στόχος επιτευχθεί, τότε υπάρχει ελπίδα να αγαπηθούν από το ευρύ κοινό και φυσικά πρώτα και κύρια από τους μαθητές μας.

Επισημαίνουμε ότι οι βασικές ιδέες και θεωρίες με τις οποίες έχουν υφανθεί τα σύγχρονα Μαθηματικά είναι απλές και μέσα στις δυνατότητες κατανόησης κάθε ανθρώπου, που διαθέτει μια μέση νοημοσύνη, κατά συνέπεια από εμάς εξαρτάται να καταστήσουμε αυτό το γεγονός σαφές προς κάθε πλευρά.

Σήμερα υπάρχει η αίσθηση ότι ο ζωτικός ρόλος που διαδραματίζουν τα Μαθηματικά αποκρύπτεται από το πλατύ κοινό. Αυτός ο ρόλος είναι μια δύναμη που ενεργοποιεί το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων του σύγχρονου κόσμου, είναι ανάγκη να αναδειχθεί ως ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες δημιουργικής ανάπτυξης και της δικής μας χώρας.

Και ας μην ξεχνάμε. Η Ελλάδα τού σήμερα έχει κάθε δικαίωμα να υπερηφανεύεται για το επιστημονικό δυναμικό που διαθέτει, σε εθνικό και διεθνές επίπεδο, στο χώρο των Μαθηματικών και όχι μόνο, γεγονός που της επιτρέπει, σε συνδυασμό με τους πολλά υποσχόμενους με παγκόσμιες επιτυχίες σε αγώνες Μαθηματικών μαθητές μας, να διατηρεί επάξια τη θέση της και την παράδοσή της μέσα στην παγκόσμια κοινότητα ως κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης.

Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο πρέπει να καταβληθεί κάθε δυνατή προσπάθεια που θα ενθαρρύνει τη μελέτη και έρευνα της μαθηματικής επιστήμης και των πολυδιάστατων εφαρμογών της, θα προάγει και θα ενισχύει τη διάχυση των νέων εξελίξεων στα Μαθηματικά, θα συνεισφέρει στη συνεχή βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης και παιδείας στη χώρα μας και θα αναδείξει το ρόλο της μαθηματικής επιστήμης ως βασικό στοιχείο μιας ελεύθερης παιδείας.

Ο Ν. ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ *είναι πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ DNA

Οι επιδόσεις των μοριακών υπολογιστών

Του ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΜΕΤΑΞΑ *

Σήμερα οι γνώσεις μας για τη δομή και τις εφαρμογές του DNA διευρύνονται μέρα με τη μέρα. Η κλασική σχέση έως τώρα του κλάδου με τα Μαθηματικά, αφορούσε ιδιαίτερα στην κατασκευή μαθηματικών μοντέλων, που με χρήση κυρίως στατιστικών μεθόδων βοηθούσαν στην επεξεργασία και επίλυση προβλημάτων γενετικής και επιδημιολογίας. Τώρα, ωστόσο, αυτή η σχέση έχει εμπλουτιστεί σε τέτοιο βαθμό ώστε να μιλάμε για το νέο κλάδο των «βιολογικών μαθηματικών» που, σύμφωνα και με τον **Ian Stewart**, θα είναι «από τις πιο σημαντικά αναπτυσσόμενες επιστημονικές περιοχές του 21ου αιώνα».

Υπολογιστές από DNA

Κάθε έλικα του DNA είναι μία «λέξη» σε ένα αλφάβητο τεσσάρων γραμμάτων (A, G, C, T, όπου A αδενίνη, G γουανίνη, C κυτοσίνη και T θυαμίνη), π.χ. η λέξη AGTGGTACATTC, που κωδικοποιεί πληροφορίες για τη δομή του μορίου.

Ο μετασχηματισμός λοιπόν των ελίκων υπό την επίδραση κάποιων ενζύμων και άρα η μεταβολή των κωδικοποιούμενων πληροφοριών είναι ανάλογα προς τη δράση μίας συνάρτησης επί ενός ορίσματος, και αυτή ακριβώς η αναλογία ήταν που οδήγησε ένα μαθηματικό, τον **L. Adleman**, στην πιο ρηξικέλευθη ιδέα των τελευταίων χρόνων: μπορούμε να αντιστοιχήσουμε τα δεδομένα ενός προβλήματος σε κωδικοποιημένες ακολουθίες βάσεων DNA και τη δράση συναρτήσεων σε μεταβολές ενζύμων, ώστε βάζοντας σε ένα δοκιμαστικό σωλήνα τις έλικες (δεδομένα) και αφήνοντάς τις υπό την επενέργεια κάποιων ενζύμων (συναρτήσεων) το βιολογικό αποτέλεσμα να είναι η κωδικοποιημένη μορφή του μαθηματικού αποτελέσματος; Αν η απάντηση ήταν καταφατική, τότε για πρώτη φορά στην ιστορία ένα μαθηματικό πρόβλημα θα λυνόταν μέσω μιας βιολογικής διεργασίας. Και πράγματι έτσι έγινε: το 1994 ο L. Adleman επέλυσε με κατάλληλους χειρισμούς ελίκων του DNA ένα μαθηματικό πρόβλημα γραφημάτων (τύπου Hamilton). Ο πρώτος υπολογιστής από DNA στην ιστορία της ανθρωπότητας είχε μόλις κατασκευαστεί!

Οι εξελίξεις στη συνέχεια πήραν τη μορφή χιονοστιβάδας.

Ο Lipton (1995) επέλυσε μέσω DNA ένα πρόβλημα από το μαθηματικό κλάδο της άλγεβρας Boole, ενώ κατόπιν άλλοι ερευνητές δημιούργησαν αλγορίθμους που επιτρέπουν, μέσω ενός τέτοιου μοριακού υπολογιστή, την εκτέλεση των βασικών αριθμητικών πράξεων, επίλυση διοφαντικών εξισώσεων, υπολογισμό αναπτυγμάτων μεγάλων οριζουσών, επίλυση προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού κ.λπ.

Μάλιστα, ορισμένα από τα επιλυμένα με μοριακό υπολογιστή προβλήματα, είναι σήμερα άλυτα από τους Η/Υ!

Μια και η επαναστατική αυτή εξέλιξη δημιουργήθηκε κυρίως από μαθηματικούς και επιστήμονες Η/Υ, ήταν φυσικό που τα πρώτα προβλήματα όπου δοκιμάστηκε η αποτελεσματικότητά της ήταν μαθηματικά (γραφημάτων, υπολογιστικά κ.λπ.). Ωστόσο, ήδη έχουμε και κάποιες ενδιαφέρουσες πιο «πρακτικές» εφαρμογές:

LOUCIANO FABRO

Το σπάσιμο του αμερικανικού κρυπτογραφικού κώδικα και ο... Deep Blue.

Η αμερικανική κυβέρνηση έχει υιοθετήσει ένα «πρότυπο απόκρυψης δεδομένων» (DES) το οποίο εθεωρείτο πρακτικά απαραβίαστο, αφού για το σπάσιμό του απαιτούνται 10.000 περίπου χρόνια συνεχούς δουλειάς Η/Υ. Η νέα πραγματικότητα των μοριακών υπολογιστών υπόσχεται μάλλον νέους πονοκεφάλους για τους εμπνευστές του DES: ο Lipton μαζί με τους φοιτητές του Boneh και Dunworth δημιούργησαν «μοριακά προγράμματα» για υπολογιστή από DNA, που καταφέρνουν να σπάσουν τον κώδικα DES σε προβλεπόμενο χρόνο 4 μηνών! Ομως δεν φαίνεται να αντιμετωπίζει μόνο η αμερικανική κυβέρνηση πρόβλημα με τους νέους υπολογιστές· ίσως πλησιάζει η ώρα που ο Deep Blue της IBM θα βρει ανταγωνιστή: το 1999 ο Faulhammer και άλλοι έλυσαν ένα πρόβλημα σκακιού για άλογα με τη χρήση υπολογιστή από RNA (που είναι παρόμοιο στη δομή του γενετικό υλικό με το DNA) κάνοντας μια έξυπνη αντιστοιχία μεταξύ δυνατών κινήσεων στη σκακιέρα του αλόγου και ελίκων RNA.

Η/Υ: Πόσο κινδυνεύουν από το δοκιμαστικό σωλήνα;

Υπολογιστές από chip ή από DNA;

Τελικά, πόσο υπερτερούν οι υπολογιστές από DNA έναντι των Η/Υ; Τα βασικά τους πλεονεκτήματα είναι:

1. Ταχύτητα: περίπου 100 φορές ταχύτεροι από τον πιο γρήγορο Η/Υ σήμερα, λόγω της μεγάλης ικανότητας εκτέλεσης παράλληλων πράξεων
2. Εξοικονόμηση ενέργειας: 20 δισ. φορές περισσότερες πράξεις ανά μονάδα ενέργειας από ό,τι ο Η/Υ.
3. Αποθηκευτική ικανότητα: σε 1 γραμ. DNA αποθηκεύονται πληροφορίες που περιέχονται σε 1 τρισ. CD

Το βασικό μειονέκτημά τους είναι η μικρή ικανότητα εκτέλεσης σειριακών πράξεων, καθώς και η ανάγκη διενέργειας ελέγχων για τον περιορισμό λαθών κατά τη πραγματοποίηση των αντιδράσεων. Η πιο πιθανή εξέλιξη, όπως αυτή διαγράφεται σήμερα, είναι ότι αν και δεν θα αντικαταστήσουν παντού τους Η/Υ, ωστόσο δεν θα είναι μακριά η εποχή που μικροί δοκιμαστικοί σωλήνες θα δίνουν απάντηση σε περίπλοκα υπολογιστικά προβλήματα!!

Το DNA και οι... κόμποι του

Οι δύο έλικες του DNA περιελίσσονται η μία γύρω από την άλλη εκατομμύρια φορές. Τώρα, θεωρώντας ότι ο πυρήνας του κυττάρου μέσα στον οποίο βρίσκονται είναι στο μέγεθος μίας μπάλας του μπάσκετ, οι έλικες αντιστοιχούν σε δύο λεπτές γραμμές μήκους 200 χιλιομέτρων, που στοιβάζονται μέσα στην μπάλα. Αναπόφευκτη είναι επομένως η δημιουργία κόμπων και τυλιγμάτων μεταξύ των ελίκων. Προκειμένου να λάβουν χώρα βασικές βιολογικές λειτουργίες, όπως αντιγραφή, μεταφορά πληροφοριών, χωρισμός κ.λπ., επεμβαίνουν κάποια ένζυμα που «κόβουν» και επανακολλούν τις έλικες, διατηρώντας αναλλοίωτες κάποιες τοπολογικές και γεωμετρικές σταθερές. Η περιγραφή και ανάλυση της δομής του DNA αλλά και της δράσης αυτών των ενζύμων, καθώς και οι επιπτώσεις τους στα μόρια του DNA, απαιτούν τη χρήση των μαθηματικών κλάδων της Τοπολογίας και της Διαφορικής Γεωμετρίας. Οι γενετιστές ανακάλυψαν ότι η αλλαγή στη μορφή των ελίκων, που επιφέρει η δημιουργία κόμπων και δεσμών, δεν μπορεί εύκολα να αναλυθεί χωρίς τη χρήση ισχυρών μαθηματικών εργαλείων. Ο μαθηματικός **De Witt Sumners** το 1995 ανέπτυξε τη μαθηματική προσέγγιση στη μελέτη των αλλαγών του DNA: η τοπολογική προσέγγιση στην ενζυμολογία είναι έμμεση μέθοδος, σύμφωνα με την οποία παρατηρώντας τις τοπολογικές και γεωμετρικές αλλοιώσεις των ελίκων μπορούμε να δημιουργήσουμε μαθηματικά μοντέλα που να εξηγούν τη λειτουργία του ενζυματικού μηχανισμού.

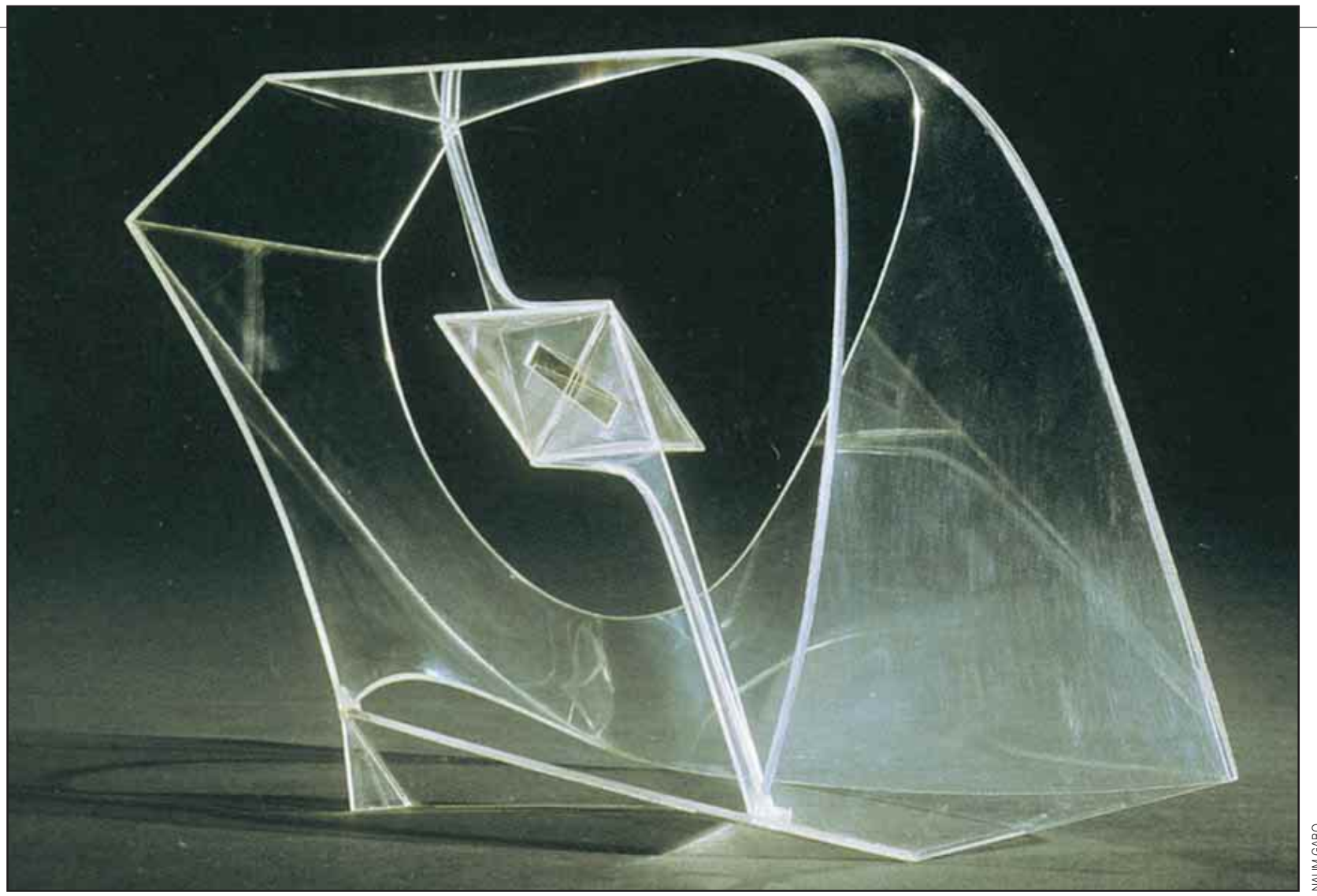
Ενα χαρακτηριστικό παράδειγμα της ζωτικής σπουδαιότητας των μαθηματικών είναι ότι σε μία από τις εξισώσεις (του J. White) που περιγράφει τον αριθμό των περιελίξεων του DNA, τα ένζυμα που ελέγχουν τα επίπεδα των τριών μαθηματικών σταθερών που εμφανίζονται, είναι εξαιρετικοί στόχοι αντικαρκινικών φαρμάκων! Η μαθηματική θεωρία των κόμπων ίσως κρατάει ένα από τα κλειδιά του μυστηρίου του DNA.

Πόσο άμεσα μπορούν τα παραπάνω να επηρεάσουν τη ζωή μας;

Οι μαθηματικοί έχουν αποδείξει ότι, θεωρητικά τουλάχιστον, μπορούμε να φτιάξουμε έναν υπολογιστή από DNA, που να μπορεί να υπολογίζει «οτιδήποτε» (μέσα σε κάποιους μαθηματικούς περιορισμούς) του ζητηθεί. Η αυγή του 21ου αιώνα μας φέρνει στο μυαλό τον Γαλιλαίο, που 4 αιώνες πριν είπε: «Το Σύμπαν μπορεί να διαβαστεί μόνο αν μάθουμε τη γλώσσα στην οποία έχει γραφτεί (...) και αυτή η γλώσσα είναι τα Μαθηματικά».

Τώρα, μοιάζει τα Μαθηματικά να μην είναι μόνο η γλώσσα αλλά η βαθύτερη ουσία του Σύμπαντός μας.

Ο ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΕΤΑΞΑΣ *είναι καθηγητής Μ.Ε.*



NAUM GABO

Θεωρία Κατηγοριών και θεμελίωση των Μαθηματικών

Του Δ. ΓΑΒΑΛΑ, δρα Μαθηματικών

Αμεσα ή έμμεσα η θεμελίωση, η διδασκαλία και η φιλοσοφία των Μαθηματικών στηρίζονται κυρίως στη Θεωρία Συνόλων. Πράγματι, σύμφωνα με τον **Mac Lane** (1986), η Συνολοθεωρία και η Λογική προβάλλουν ένα συμβατικό θεμέλιο για τα Μαθηματικά με το να ορίζουν τα μαθηματικά αντικείμενα με τη γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων και να αποδεικνύουν τα μαθηματικά θεωρήματα από τα αξιώματα και τους ορισμούς της **ZFC**, χρησιμοποιώντας τους κανόνες της Λογικής. Ομως, πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα δεν μπορούν να λυθούν στη βάση των αξιωμάτων της Θεωρίας Συνόλων. Οι αρχές της Θεωρίας Συνόλων δεν είναι πλήρως ορισμένες, δηλαδή δεν υπάρχει μοναδικός και καθορισμένος κατάλογος αξιωμάτων για τα σύνολα. Η διαισθητική ιδέα ενός συνόλου ως συλλογής οδηγεί σε εντελώς διαφορετικούς και αμοιβαίως ασυνεπείς σχηματισμούς. Αυτή η κατάσταση είναι παρόμοια με εκείνη που επικρατούσε στη Γεωμετρία μετά την απόδειξη της συνέπειας για τη Μη-ευκλείδειο Γεωμετρία, που έδειξε ότι υπάρχουν πολλές Γεωμετρίες και όχι μόνο μία. Κατά παρόμοιο τρόπο, η διαισθητική ιδέα μιας συλλογής/συνόλου οδηγεί σε διαφορετικές εκδοχές της Θεωρίας Συνόλων. Αυτός είναι επαρκής λόγος να θεωρήσουμε άλλες θεωρίες ως θεμέλια των Μαθηματικών και η εναλλακτική θεωρία που προτείνεται είναι αυτή των Κατηγοριών.

Οι νόμοι της Θεωρίας Κατηγοριών δίνουν έμφαση όχι μόνο στα αντικείμενα, αλλά κυρίως στους μορφισμούς μεταξύ αυτών. Ετσι, με κάθε τύπο μαθηματικού αντικειμένου έχουμε και τον κατάλληλο μορφισμό. Επίσης, υπογραμμίζουν τη χρήση των καθολικών κατασκευών και των αλληλοπροσαρτημένων συναρτητών. Πάντως, πρέπει να παρατηρήσει κανείς ότι, ενώ όλα αυτά δουλεύουν σε τομείς όπως η Τοπολογία και η Αλγεβρα, δεν εφαρμόζονται ακόμα με επιτυχία στην Ανάλυση. Φαίνεται όμως πως δεν έχει βρεθεί απλός και επαρκής τρόπος θεμελίωσης και οργάνωσης όλων των Μαθηματικών. Πράγματι, κατά τη διαδρομή των Μαθηματικών, υπήρξαν διάφορες προσπάθειες οργάνωσης. Ετσι, για τους Ελληνες το υποκείμενο πλαίσιο ήταν η Γεωμετρία, κατά το 18ο αιώνα ο Λογισμός και αργότερα η Θεωρία Ομάδων και η Συνολοθεωρία. Σήμερα ίσως είναι η Θεωρία Κατηγοριών, η οποία εκτός των άλλων διαθέτει τη δυναμική και συστημική φύση που απαιτεί η εποχή και τα μέσα της.

Σύμφωνα με τον **Bell** (1981), η Θεωρία Κατηγοριών προήλθε από την παρατήρηση ότι έννοιες, όπως του *ισομορφισμού* και της *δομής*, έχουν καθολικότητα, η οποία είναι ανεξάρτητη από τη συνολοθεωρητική προέλευση και χρήση τους. Πολλές από τις έννοιες της Αλγεβρας μπορούν να προέλθουν από την έννοια της «απεικόνισης που διατηρεί τη δομή», που είναι ουσιαστικά ο μορφισμός. Ετσι, οι σχέσεις μεταξύ μαθηματικών δομών, όπως αυτές ενσωματώθηκαν στο δίκτυο των μορφισμών, θεωρούνται πιο σημαντικές από τα αντικείμενα που συνιστούν τα στοιχεία των δομών. Επίσης, η έννοια της ταυτότητας, που είναι κατάλληλη για δομές, δεν είναι η συνολοθεωρητική ισότητα αλλά ο ισομορφισμός. Από φιλοσοφική άποψη, μια κατηγορία θεωρείται ως υποστασιοποίηση της αφηρημένης δομής, της οποίας όλα τα σχετικά μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν παράδειγμα, ή ακόμα ότι, κυριολεκτικά, αυτή είναι η αφηρημένη δομή, και έτσι η κατηγορία από μόνη της εκλαμβάνεται ως η θεωρία της μαθηματικής δομής.

Επίσης, σύμφωνα με τον Bell (1988), η κατηγορία παρέχει μια εκδοχή των Μαθηματικών που είναι ελεύθερη στοιχείων. Και η Θεωρία Κατηγοριών και η Θεωρία Συνόλων διαπραγματεύονται την ιδιαιτερότητα των μαθηματικών δομών. Η Θεωρία Συνόλων απογυμνώνει τη δομή από την οντολογία των Μαθηματικών και αφήνει τις πληθικότητες των αδόμητων ατόμων, δηλαδή τα αφηρημένα σύνολα, ανοιχτές στην επιβολή νέας δομής. Η Θεωρία Κατηγοριών, αντίθετα, διαπραγματεύεται *συγκεκριμένη δομή* με το να τη θεωρεί δεδομένη και να τη γενικεύει. Μπορούμε να πούμε ότι η επιτυχία της Θεωρίας Κατηγοριών, ως *ενοποιητικής/καθολικής γλώσσας* των Μαθηματικών, οφείλεται στο γεγονός ότι αυτή και μόνο δίνει άμεση έκφραση στην κεντρική θέση της μορφής και της δομής στα Μαθηματικά. Η Θεωρία Κατηγοριών θεωρείται ουσιαστικά αντιπλατωνική, επειδή υποσκάπτει την άποψη ότι η αναφορικότητα του νοήματος οποιασδήποτε μαθηματικής έννοιας καθορίζεται ως προς ένα μοναδικό και απόλυτο σύμπαν συνόλων. Η κατηγοριοθεωρητική άποψη προτείνει ότι το *απόλυτο σύμπαν συνόλων αντικαθίσταται από πλειάδα τοπικών πλαισίων, καθένα από τα οποία μπορεί να θεωρηθεί ως ένας πιθανός κόσμος, στον οποίο λαμβάνει χώρα η μαθηματική δραστηριότητα.* Η μαθηματική αυτή δραστηριότητα, που λαμβάνει χώρα σε τέτοια τοπικά πλαίσια / κόσμους, κωδικοποιείται με Τοπικές Θεωρίες Συνόλων. Συνεπώς, φαίνεται κατάλληλο να καλούμε αυτές τις κωδικοποιήσεις Τοπικά Μαθηματικά, σε αντίθεση με τα Απόλυτα / Κλασικά Μαθηματικά, που σχετίζονται με το απόλυτο σύμπαν συνόλων. Η αποδειξιμότητα ενός μαθηματικού ισχυρισμού σημαίνει ότι είναι αμετάβλητος, δηλαδή ισχύει σε κάθε τοπικό μαθηματικό πλαίσιο (Bell, 1986).

Η τελική απάντηση στο ερώτημα αν η Θεωρία Κατηγοριών μπορεί να εξυπηρετήσει ως θεμέλιο των Μαθηματικών είναι ότι *θα ήταν τεχνικά δυνατό να δώσουμε μια καθαρά κατηγοριοθεωρητική έκφραση όλων των μαθηματικών εννοιών που εμφανίζονται στην αξιωματική Θεωρία Συνόλων και έτσι τυπικά δυνατό για τη Θεωρία Κατηγοριών να αποτελέσει θεμέλιο για τα Μαθηματικά, όπως κάνει έως τώρα η* Θεωρία Συνόλων.

Είπαν...

«Τα Μαθηματικά λυτρώνουν και ανυψώνουν την ψυχή»
Πρόκλος (412-485 μ.Χ.)

«Δεν μπορούμε να γνωρίσουμε το Σύμπαν αν δεν διαβάσουμε τη γλώσσα του· και αυτή είναι η μαθηματική γλώσσα»
Γαλιλαίος (1564-1642)

«Τα Μαθηματικά είναι η τιμή του ανθρώπινου πνεύματος»
(C. Jacobi)

«Στα Μαθηματικά, τα απλά πράγματα είναι συχνά πιο αξιόλογα από τα πολύπλοκα που παίρνουμε με σκληρή εργασία»
Charles Hermite (1822-1901)

«Η φαντασία είναι περισσότερο σημαντική από τη γνώση»
Albert Einstein

«Είναι αδύνατο να είσαι μαθηματικός χωρίς να είσαι ένας ποιητής στην ψυχή»
Mittag Leffler (1846-1927)

Παράλληλες αναζητήσεις

Από τον Ντίρερ στον Πικάσο, τον Μπρακ και τον Ντισέμπ

Της ΧΡΙΣΤΙΝΑΣ Π. ΦΙΛΗ*

Μελετώντας τα μεγάλα και πρωτοποριακά βήματα της Τέχνης, θα εντυπωσιαστούμε από τη στενή και συγχρονισμένη συσχέτιση, η οποία υπάρχει ανάμεσα στις καινούργιες θέσεις της Τέχνης και την πρόοδο της Γεωμετρίας.

Τα πρώτα εικαστικά δημιουργήματα είναι μιμήσεις των καθημερινών αντικειμένων και ακριβείς ισομορφικές απεικονίσεις των προτύπων (σπήλαιο του Laussel). Μετά τα πρώτα «ομοιώματα» σε εμβρυακή κλίμακα, ο πρωτόγονος καλλιτέχνης επιχειρεί το επόμενο νοητικό άλμα απεικονίζοντας τον τρισδιάστατο χώρο σε δισδιάστατη επιφάνεια (σπήλαια Lascaux και Altamira).

Στους πρώτους μεγάλους πολιτισμούς που άνθησαν στη Μεσόγειο (3000 π.Χ.), οι φυσικές δυνάμεις προσωποποιούνται σε ένα θρησκευτικό πλαίσιο, ενώ η προκλασική ελληνική εποχή αποστασιοποιείται σταδιακά από τη μαγεία και προσπαθεί να εισχωρήσει στους νόμους της φύσης. Οι καλλιτέχνες του Ζ' αιώνα π.Χ. έχοντας για σημείο εκκίνησης τη μετωπική τέχνη του Νείλου και του Ευφράτη, κατορθώνουν να διακόψουν τους δεσμούς με την αιγυπτιακή στασιμότητα και εμπλουτίζουν τα έργα τους ανακαλύπτοντας την ανατομία, τον όγκο και την κίνηση. Τον Ε' αιώνα π.Χ. επιχειρείται η σύνθεση δύο εκφραστικών μέσων, η ιωνική κινητικότητα εισχωρεί και ενσωματώνεται στη δωρική σταθερότητα και τα δύο ρεύματα μαζί συγκλίνουν προς μια συνθετική αναπαράσταση του αισθητού κόσμου. Η ζωγραφική, η γλυπτική, η αγγειογραφία θα αποτελέσουν αξεπέραστα σημεία αναφοράς.

Η γεωμετρία ξεκινάει με τον **Θαλή**, ο οποίος στηριζόμενος στην έννοια της απόδειξης, θέτει τα θεμέλια για την αξιωματική διατύπωση της Επιστήμης, ενώ ο **Πυθαγόρας** μετατρέπει τη μελέτη της γεωμετρίας σε σχήμα ελεύθερης παιδείας εξετάζοντας τα θεωρήματα με άυλο και νοητικό τρόπο.

Στο Δ' αιώνα π.Χ., η Σχολή του Πλάτωνος με την προμετωπίδα «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω μου την στέγην», επιδίδεται με επιτυχία στη γεωμετρία και αργότερα ο **Ευκλείδης** και ο **Απολλώνιος** αναδεικνύονται ως οι κατ' εξοχήν εκπρόσωποι του γεωμετρικού ελληνικού πνεύματος. Η θεωρητική άνθηση της Γεωμετρίας συμβαδίζει με την παράλληλη άνοδο της Τέχνης. Η βαθιά γνώση των γεωμετρικών νόμων διαφαίνεται και στο διάκοσμο των καμπυλόμορφων αγγείων. Οι Έλληνες χρησιμοποιούν το πλέγμα των γραμμών καμπυλότητας των επιφανειών ως κύριο περίγραμμα του διάκοσμου.

Όμως οι αρχαίοι Έλληνες δεν τολμούν να κάνουν το επόμενο βήμα, να τμήσουν δηλαδή την οπτική πυραμίδα με ένα επίπεδο και να προχωρήσουν σε μία «αναπαράσταση» του χώρου. Το βήμα αυτό πραγματοποιήθηκε στην Αναγέννηση. Το 15ο αιώνα ο χώρος διατάσσεται και συστηματοποιείται παρουσιάζοντας επιτακτικά δυνατή τη δημιουργία της γραμμικής προβολής. Μέσα από μια συστηματική μελέτη των κανόνων της προοπτικής, οι Ιταλοί καλλιτέχνες προσφέρουν το θεωρητικό πλαίσιο για έναν καινούργιο κλάδο της Γεωμετρίας που έμελλε να παρουσιαστεί αργότερα, την προβολική γεωμετρία.

Από όλους τους καλλιτέχνες της Αναγέννησης, εκείνος που τους ξεπέρασε όλους σε μαθηματική σύλληψη είναι ο **Albrecht Dürer** (1471-1528) ο οποίος στη μελέτη του *Πραγματεία για τις μετρήσεις με κανόνα και διαβήτη σε ευθείες γραμμές, επίπεδα και στερεά σώματα*, υπογραμμίζει την αυστηρή μαθηματική δομή, όπου κάθε κανόνας συνοδεύεται με την απόδειξή του και «αφού - σημειώνει στην πραγματεία του ο Dürer- η γεωμετρία είναι η ακριβής θεμελίωση για κάθε ζωγραφική, αποφάσισα να διδάξω τα στοιχεία της και τις αρχές της στους νεότερους ζηλωτές της τέχνης».

Κατά το 17ο αιώνα, η Γεωμετρία αναβιώνει στο Παρίσι. Στη θεωρητική προοπτική ο μηχανικός και αρχιτέκτων **Girard Desargues** (1591-1661) συμβάλλει με το έργο του στην εξέλιξη της προοπτικής και στην εμβρυακή θεώρηση της προβολικής γεωμετρίας. Δυστυχώς οι σύγχρονοί του δεν κατανόησαν τις καινοτομίες του.

Την εποχή που ο Desargues παρουσιάζει τις τόσο πρωτότυπες ιδέες του, η εξεζητημένη και θεωρητική προοπτική ενοχλούσε τους καλλιτέχνες. Ετσι στο τέλος της εποχής του μπαρόκ, ο δρόμος του ζωγράφου και του θεωρητικού χωρίζει. Την ίδια εποχή οι αρχιτέκτονες προσπαθούν με έντονα διακοσμητικά στοιχεία, με την προοπτική της ατμόσφαιρας να διακόψουν την ασυνέχεια του χώρου.

Με την ανακάλυψη της παραστατικής γεωμετρίας από τον **Gaspard Monge** (1746-1818) και τη δημιουργία και πρόοδο της προβολικής Γεωμετρίας οι κανόνες της προοπτικής βρίσκονται πάλι στο προσκήνιο. Οι έρευνες των **Brianchon, Poncelet, Möbius, Steiner, Von Staudt** οδηγούν στην οικοδόμηση της προβολικής γεωμετρίας. Μάλιστα, ο Von Staudt κατορθώνει να ανασκευάσει όλο το οικοδόμημα της καινούργιας Γεωμετρίας και το θεμελιώνει ανεξάρτητα από κάθε μετρική έννοια. Στο έργο του *Γεωμετρία της Θέσης* γίνεται κ
τανοητό ότι η καινούργια Γεωμετρία, η πρ
βολική, είναι πιο βασική από την Ευκλε
δεια. Αργότερα, η θεωρία των ομάδων, η
ποία θεμελιώθηκε από τον E. Galois (181
1832) προσφέρει στον **E. Klein** (1849-192
τα ακριβή κριτήρια για την ταξινόμηση τ
γεωμετριών.

Με την εισαγωγή της τοπολογικής παρ
μόρφωσης στη Γεωμετρία από τους **A.**
Möbius και **C. Newmann** οδηγεί τους μαθ
ματικούς να ανακαλύψουν το αμετάβλητ
το οποίο είναι και η καθ' αυτή ουσία των
ντικειμένων. Περίεργη σύμπτωση από
1875 ο **Cézanne** και αργότερα ο **Gaugu**
προσπαθούν να παρουσιάσουν την εσώτερ
γεωμετρική δομή του αντικειμένου.

Την ίδια εποχή που ο **Einstein** διατυπών
την έννοια του χωροχρόνου, γεννιέται σ
Παρίσι η τέταρτη διάσταση με την κίνησ
Ετσι καταρρέει ο παραδοσιακός οπτικ
κύβος της Αναγέννησης. Ο **Picasso** και
Braque «εντάσσουν» τη διάσταση του χρ
νου στον πλαστικό χώρο.

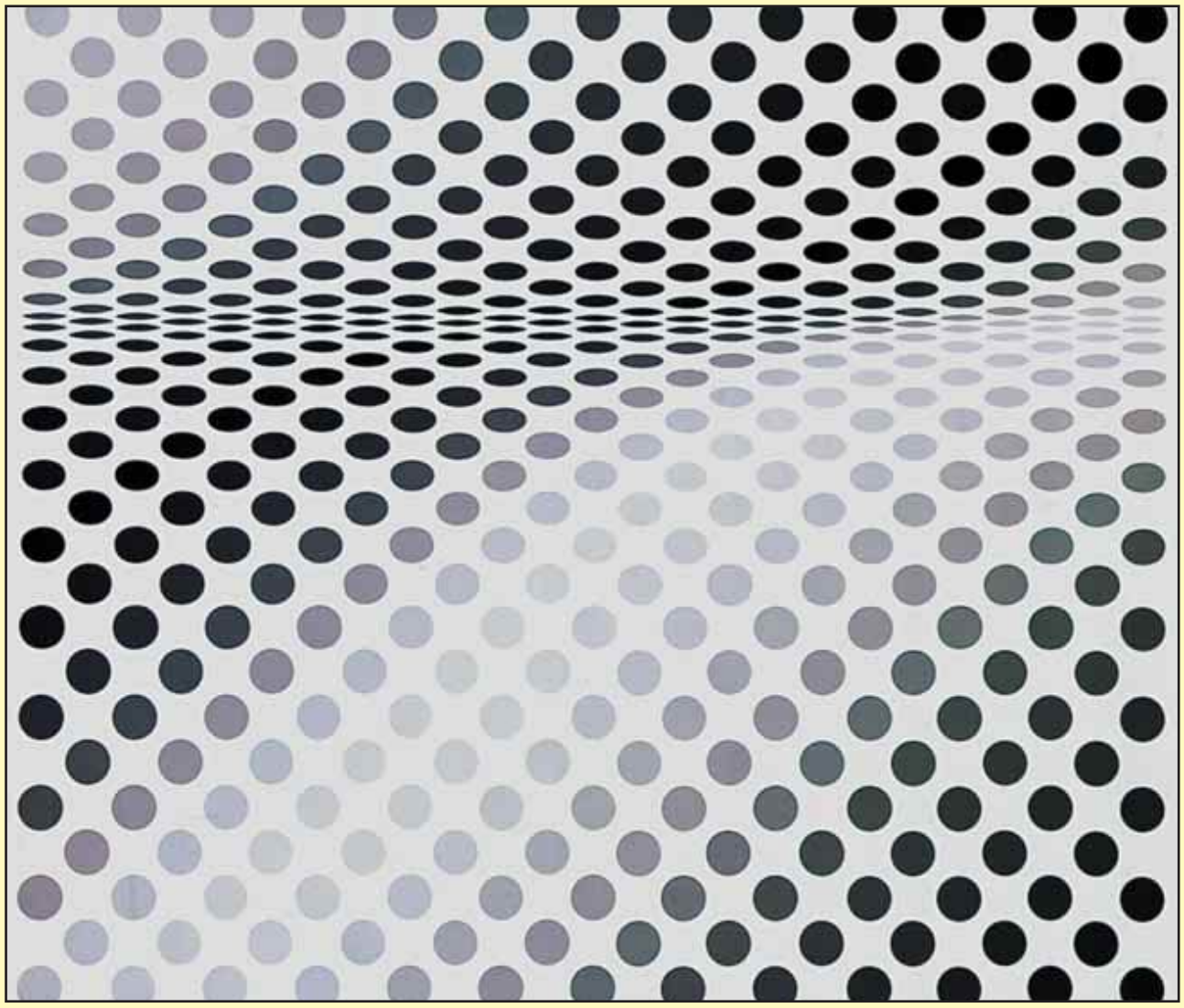
ALBRECHT DURER

Τα έργα του Picasso *Ο ποιητής* και του **Duchamp** *Το γυμνό που κατεβαίνει τη σκάλα* τοποθετούν φανερά το πρόβλημα της πλαστικής έκφρασης της κίνησης. Οι κυβιστές θέλησαν να συμπλησιάσουν την Τέχνη με την Επιστήμη. Οι θεωρητικοί του Κυβισμού μελετούν και διαδίδουν στο πλατύ κοινό τα φιλοσοφικά κείμενα, το Poincaré και κυρίως αυτά που αφορούν το θέμα της διάστασης. Ο Κυβισμός είναι μια ανανέωση της παράδοσης του φυσικού αντικειμένου αλλά η πολυεδρική θεώρηση είναι ένα γεγονός της πραγματικότητας που έχει αξία αυτή καθ' αυτή και όχι γι' αυτό που παρουσιάζει.

Πώς όμως ερμηνεύεται αυτός ο παράξενος παραλληλισμός Γεωμετρίας και Τέχνης; Η γεωμετρική γνώση αποτελεί αναγκαίο θεωρητικό και πρακτικό εργαλείο για τις εικαστικές τέχνες. Η Τέχνη πάλι με τη σειρά της εμπνέει και ωθεί τη Γεωμετρία συνενώνοντας και αφομοιώνοντας «δανεισμένα» στοιχεία τόσο από τον υλικό κόσμο όσο και από τον αφηρημένο και θεωρητικό χώρο της Επιστήμης.

Από τις αρχές του 20ού αιώνα η Γεωμετρία και τα Μαθηματικά απομακρύνονται από την πραγματικότητα· το ίδιο και η ζωγραφική. Τα «φαινόμενα» παραχωρούν τη θέση τους στη βαθύτερη αναζήτηση της ουσίας. Η σύγχρονη Γεωμετρία απελευθερώνεται από τα μοντέλα του υλικού κόσμου και δημιουργεί δικά της αντικείμενα και χώρους. Τότε και η ζωγραφική παύει και αυτή να ασχολείται με την απεικόνιση των μοντέλων του εξωτερικού κόσμου. Φανταστικούς χώρους δημιουργούν οι ζωγράφοι, φανταστικούς χώρους και οι μαθηματικοί, όταν συνειδητοποιούν και αφομοιώνουν τη φράση του **G. Cantor**, ότι «η ουσία των Μαθηματικών βρίσκεται στην ελευθερία τους».

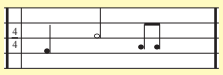
** Η **ΧΡΙΣΤΙΝΑ Π. ΦΙΛΗ** είναι επίκουρη καθηγήτρια ΕΜΠ - μέλος της Διεθνούς Ακαδημίας της Ιστορίας των Επιστημών*



BRIDGET RILEY

Ρυθμός - Αριθμός

Η πρώτη συνάντηση της Μουσικής με τα Μαθηματικά συντελείται μέσω της αίσθησης που έχουμε για το χρόνο. Ο άνθρωπος διαθέτει την ικανότητα να εντοπίζει, να απομονώνει χρονικές στιγμές.
Το διάστημα που μεσολαβεί, μεταξύ των δύο στιγμών, συγκροτεί την έννοια της διάρκειας.
Η κατάτμηση που υφίσταται ο χρόνος από τη ροή των γεγονότων δημιουργεί ένα πυκνό σύνολο από στιγμές. Κατά τον **Bachelard**, η διάρκεια είναι ένας αριθμός, μονάδα του οποίου είναι η στιγμή.
Η πρώτη μαθηματική έννοια που είχε αρχίσει από νωρίς να κατασκευάζεται στο νου του ανθρώπου ήταν αυτή του αριθμού.
Το παιδί, μέσω της έμφυτης ικανότητας κατάτμησης του χρόνου, δημιουργεί μια 1-1 αντιστοιχία των γεγονότων με τις χρονικές στιγμές, δηλαδή, ουσιαστικά αριθμεί.
Βάσιμα, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι οι δύο πρωταρχικές, θεμελιώδεις έννοιες του ρυθμού και του αριθμού έχουν κοινή καταγωγή, την οποία έλκουν από την κατάτμηση του χρόνου, μέσω της διαστημοποίησης της διάρκειας και την 1-1 αντιστοιχία.
Σήμερα οι δύο αυτές έννοιες συνυπάρχουν στον τρόπο με τον οποίο γράφεται η δυτική μουσική. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

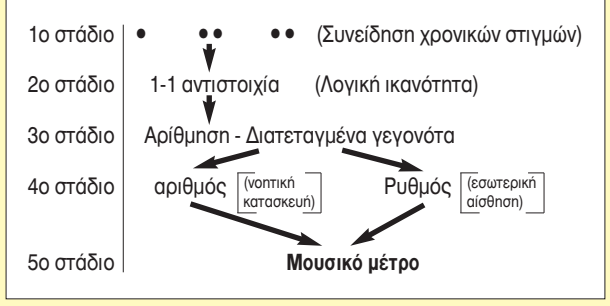


ΣΧΗΜΑ 1

Στο σχήμα 1 φαίνεται ένα μέρος ενός μουσικού κομματιού.

Η χρονική αξία του πρώτου και δεύτερου συμβόλου είναι 1/4 και 1/2 αντίστοιχα, ενώ κάθε ένα από τα σύμβολα (νότες) που είναι ενωμένα έχουν εξ ορισμού αξία 1/8. Το κλάσμα 4/4 στην αρχή καθορίζει πως κάθε μέτρο, κάθε διάστημα δηλαδή το οποίο περιέχει μια μουσική φράση, πρέπει να περιέχει σύμβολα (νότες) συνολικής αξίας 4/4. Πράγματι 1/4+1/2+1/8+1/8=4/4. Τώρα πλέον ο αριθμός καθορίζει το ρυθμό και επιτρέπει να εκτελείται ένα μουσικό κομμάτι συγχρονισμένα από τους μουσικούς.

Τα όσα περιγράψαμε θα μπορούσαν να αναπαρασταθούν στο παρακάτω σχήμα:



Η Μουσική είναι ένα ποιοτικό φαινόμενο, όπως η αίσθηση του ωραίου, της ανάμνησης και της λήθης, του ευχάριστου και του δυσάρεστου. Η ιστορία του δυτικού κόσμου συνδέεται άμεσα, τους τρεις τελευταίους αιώνες, με την προσπάθεια υπαγωγής όλων των ποιοτικών φαινομένων σε ποσότητες, εφόσον έτσι τα φαινόμενα αυτά γίνονται ελέγξιμα, ερμηνεύσιμα, αντικειμενικά.
Κάθε εσωτερική αίσθηση μπορεί πλέον να γίνει εικόνα, να βγει στο χώρο.
Οι νότες γίνονται καμπύλες, κινούμενες σε έναν παλμογράφο. Ενας συνεχής μετασχηματισμός συντελείται, ο οποίος μεταμορφώνει το υποκειμενικό σε αντικειμενικό, καταλύτης του οποίου, όπως φαίνεται, είναι τα Μαθηματικά...

ΚΕΪΣΟΓΛΟΥ ΣΤΈΦΑΝΟΣ*
Μαθηματικός, καθηγητής Μ.Ε. (M.ed.)

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΤΑΥΡΟΥ*
Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικού Τμήματος Πανεπιστημίου Αθηνών

**Αποσπάσματα από εργασία τους στο 17ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ

Ο λογισμός προϋποθέτει την ασυνέχεια

Του ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗ Μ. ΡΑΣΣΙΑ*

Η ασυνέχεια είναι κανόνας στον κόσμο. Η συνέχεια είναι εξαίρεση. Η ανισότητα είναι επίσης κανόνας. Η ισότητα είναι εξαίρεση. Οπως και η μη γραμμικότητα είναι κανόνας, ενώ η γραμμικότητα αποτελεί εξαίρεση.

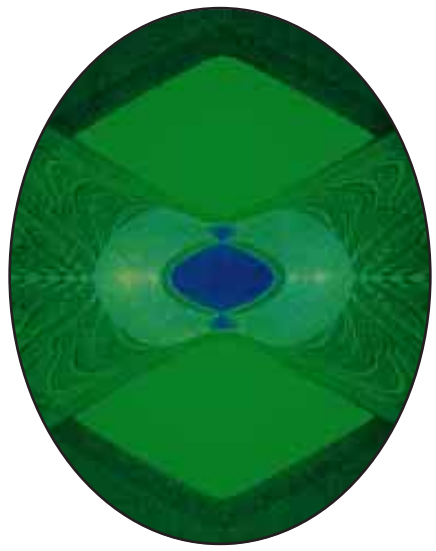
Οι σκέψεις αυτές που φαίνονται προφανείς και τις διαπιστώνουμε καθημερινά στη ζωή μας, για να τεκμηριωθούν στα Μαθηματικά απαιτείται εφαρμογή ειδικών μεθόδων και θεωριών, μερικές από τις οποίες ανάγονται στην αρχαιότητα. Κατά τους δύο τελευταίους όμως αιώνες σημειώθηκε ραγδαία εξέλιξη στην κατανόηση και επίλυση προβλημάτων των φυσικομαθηματικών και ανθρωπιστικών επιστημών που βασίζονται στις έννοιες της ασυνέχειας και της μη γραμμικότητας, όπως είναι η Θεωρία Καταστροφών, η θεωρία Χάους, η θεωρία των Fractals.

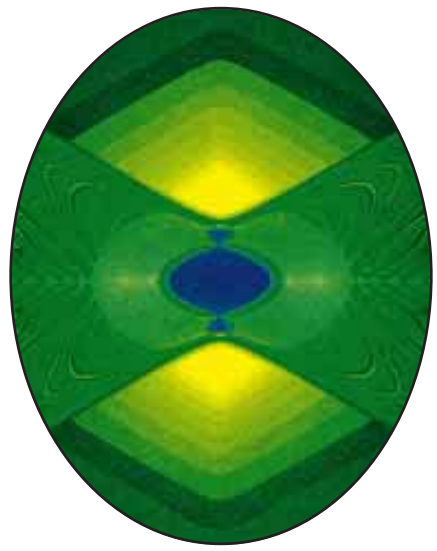
Τον 17ο αιώνα οι **Newton** (1642-1727) και **Leibniz** (1646-1716) θεμελίωσαν τον Απειροστικό Λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις. Στον αντίποδα του Απειροστικού Λογισμού, ο Γάλλος μαθηματικός **René Thom** (1923 -) επινόησε τη Θεωρία Καταστροφών εισάγοντας έτσι έναν μαθηματικό λογισμό για μη συνεχείς εξελίξεις.

Η Θεωρία Καταστροφών είναι μια μη γραμμική θεωρία που μελετά φαινόμενα εξελισσόμενα με έναν ασυνεχή τρόπο. Μελετά δηλαδή κάθε τι το απρόβλεπτο που εμφανίζεται ξαφνικά και διακόπτει τη συνέχεια, όπως είναι για παράδειγμα ο ακαριαίος θάνατος, ο ξαφνικός πόλεμος, η απότομη πτώση της τιμής ενός νομίσματος κ.λπ.

Η μελέτη φαινομένων μη γραμμικότητας απασχόλησε στα τέλη του 19ου αιώνα τον **Henri Poincaré** (1854-1912) που μελετώντας το πρόβλημα των τριών ουρανίων σωμάτων έθεσε τις βάσεις ενός καινούργιου κλάδου, των Μαθηματικών της Τοπολογικής Δυναμικής. Με τη μονογραφία του «Analysis Situs» το 1895 θεμελίωσε αυτό που λέμε σήμερα Τοπολογία. Το πνεύμα της επιστημονικής σκέψης του Poincaré πάνω στην Τοπολογική Δυναμική ακολούθησε στις ΗΠΑ ο **George Birkhoff** (1884-1944) ερευνώντας μεταξύ άλλων θέματα της Ουράνιας Μηχανικής. Ενα χρόνο μετά το θάνατο του Poincaré, ο νεαρός τότε **Birkhoff** απέδειξε το «τελευταίο γεωμετρικό θεώρημα του Poincaré» (Poincaré's last geometric theorem) που αναφέρεται στο πρόβλημα των τριών ουράνιων σωμάτων, ένα πρόβλημα που είχε προσπαθήσει να λύσει και ο ίδιος ο Poincaré, χωρίς όμως αποτέλεσμα.

Κατόπιν ο **Marston Morse** (1892-1976), μαθητής του Birkhoff, ακολουθώντας τα αχνάρια των δύο προηγουμένων (Poincaré, Birkhoff), εισήγαγε τη σύγχρονη θεωρία των κρίσιμων σημείων (critical points) στο Λογισμό των Μεταβολών, γνωστή σήμερα ως θεωρία Morse. Μια θεωρία που αποτέλεσε τον κλάδο που ο ίδιος ονόμασε macroanalysis. Είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που στη συνέχεια εξελίχθηκε στην Καθολική Ανάλυση (Global Analysis) με την πρωτοποριακή συμβολή ιδιαίτερα των **J. Eells, S. Smale, R. Palais** και **R. Thom.**





Ο R. Thom με τις καινούργιες έννοιες που εισήγαγε στη Διαφορική Τοπολογία απέδειξε το φημισμένο «θεώρημα της υπογραφής» (Theorem of Signature) που έχει τεράστιες εφαρμογές σε δύσκολα προβλήματα της Τοπολογίας και της Ανάλυσης. Απέδειξε ακόμη στη θεωρία των μορφών (Theorem of forms) ότι υπάρχουν πλήρεις ομολογιακές τάξεις (homological classes) που δεν μπορούν να αποτελούν αναπαράσταση μιας οποιασδήποτε διαφορικής μορφής (differential form). Επίσης βρήκε καινούργιους χώρους που φέρουν το όνομά του (Thom spases) και το 1956 ανάπτυξε τη θεωρία της εγκαρσιότητας (transversality) και συνεισέφερε στο πρόβλημα της κατανόησης των ιδιομορφιών των λείων απεικονίσεων (smooth mappings). Αυτή η εργασία αποτέλεσε τη βάση για τη μετέπειτα διατύπωση της Θεωρίας Καταστροφών που δημοσίευσε το 1968. Ηταν βεβαίως τότε ήδη ευρέως γνωστός γιατί του είχε απονεμηθεί το 1958 η μεγαλύτερη διάκριση των Μαθηματικών, το Fields Medal, από την Παγκόσμια Μαθηματική Ενωση.

Μια μεγαλειώδης σύλληψη που η μαθηματική της μορφή ποτέ δεν αμφισβητήθηκε

Τα Μαθηματικά που χρησιμοποίησε ο René Thom στη Θεωρία Καταστροφών προέρχονται κυρίως από τους κλάδους της Διαφορικής Τοπολογίας, της Αλγεβρικής Γεωμετρίας, της Αλγεβρικής Τοπολογίας, του Λογισμού των Μεταβολών, των Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους και της Αλγεβρας.

Ο Thom ξεκίνησε την καριέρα του μελετώντας κυρίως προβλήματα αλγεβρικά και τοπολογικά. Σήμερα, αυτοχαρακτηρίζεται ως «ένας καθολικός τοπολόγος». Τονίζει μάλιστα: «Εχω μια μεταφυσική αίσθηση της συνέχειας». «Σκέφτομαι τις αναλογίες. Τον κόσμο πριν και μετά τη Γένεση».

Τον απασχολεί από την αρχή της σταδιοδρομίας του η έννοια του συνόρου, η έννοια του ορίου μέσα στην Τοπολογία και συνθέτει τη δική του θεωρία. Ψάχνει την κλασική Δυναμική έναντι της αριστοτελικής Δυναμικής. Πιστεύει ότι το ένα παραπέμπει στο άλλο. Η αιωνιότητα είναι γι' αυτόν μια διαρκής κίνηση. Ο Θεός, κατά την άποψή του, είναι η πρώτη αιτία για την οποία ακριβώς δεν υπήρχε κανένα πρόβλημα επειδή ήταν αιώνιος. Δεν υπάρχει στο Θεό όριο γέννησης και θανάτου...

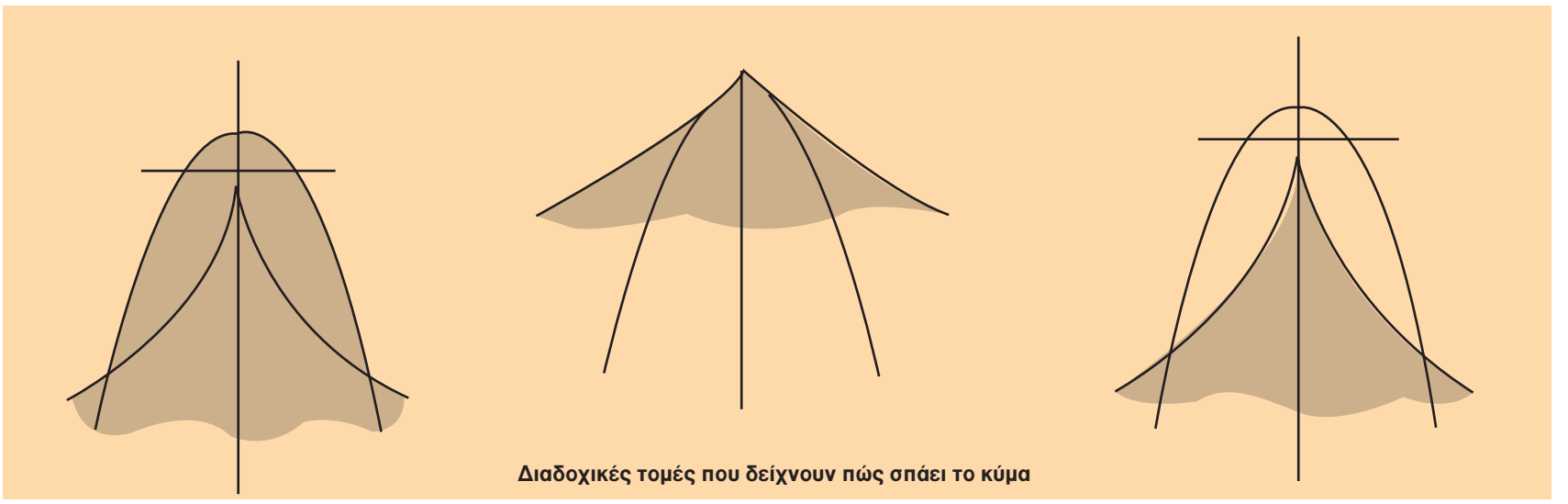
Το συνεχές είναι κάτι που βρίσκεται σε κάθε μαθηματική σκέψη. Η μεγάλη απορία του όμως είναι η αντιπαράθεση μεταξύ του συνεχούς και του διακριτού. Για παράδειγμα, μέσα στη σκέψη που είναι συνεχής υπάρχουν λέξεις, φράσεις. Οι λέξεις που έρχονται η μία μετά την άλλη σε μια φράση αποτελούν ένα διακριτό σύνολο του οποίου η ποιότητα του νοήματος αλλάζει όταν αλλάζει η σειρά των λέξεων.

Η Θεωρία των Καταστροφών προσπαθεί να περιγράψει απότομες αλλαγές από μια κατάσταση ευστάθειας σε μια άλλη κατάσταση ευστάθειας. Πρότεινε λοιπόν ο Thom εφτά «στοιχειώδεις καταστροφές» (elementary catastrophes) με τις οποίες θα μπορεί κανείς να περιγράψει διάφορες εξελίξεις ή πορείες μέσα στο χωρόχρονο. Στις εφτά αυτές στοιχειώδεις καταστροφές έδωσε και αντίστοιχα ονόματα, όπως πτυχή (fold), ανάκαμψη (cusp), χελιδονο-ουρά (swallow-tail), πεταλούδα (butterfly), υπερβολική ομφαλική καταστροφή (hyperbolic), ελλειπτική ομφαλική καταστροφή (elliptic) και παραβολική ομφαλική καταστροφή (parabolic).

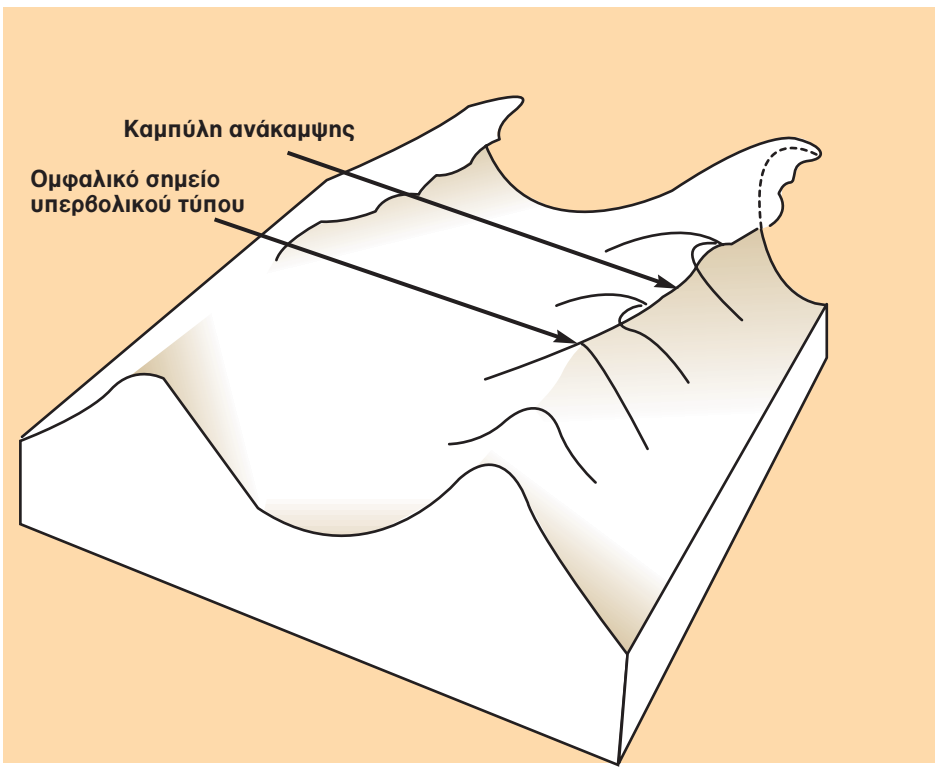
Ο ίδιος, ενθουσιασμένος από την ανακάλυψή του, είπε ότι η Θ. Κ. είναι, ενδεχομένως, μετά τη Λογική του Αριστοτέλη, η πρώτη προσπάθεια για τη διατύπωση της θεωρίας της αναλογίας.

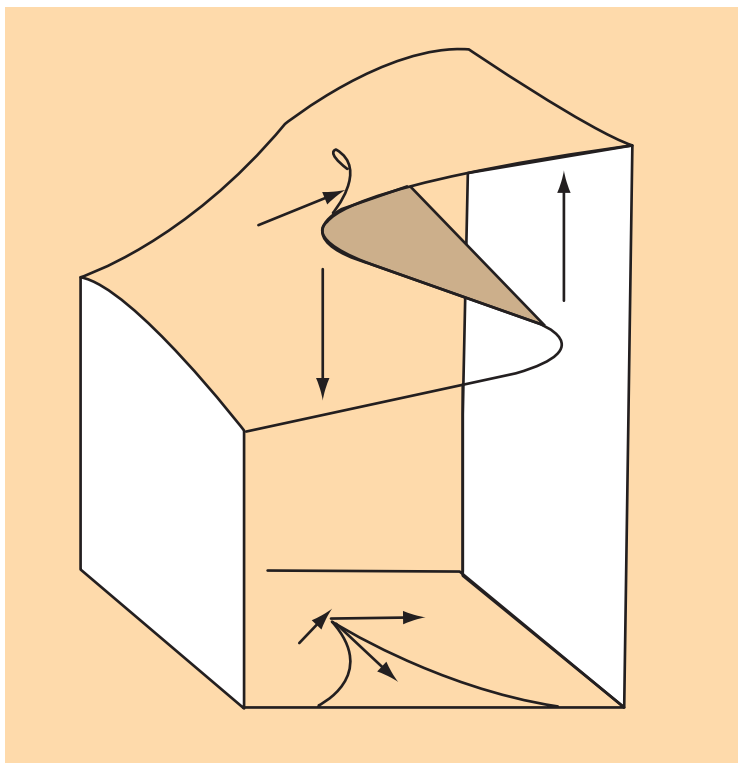
Η εντυπωσιακή υποδοχή της από το ευρύ κοινό προκάλεσε κάποιες αντιδράσεις στον επιστημονικό κόσμο. Ο Thom ήταν υπεύθυνος για τη δημιουργία της καθαρά μαθηματικής μορφής της θεωρίας, η οποία ποτέ δεν αμφισβητήθηκε. Αποτελεί μια μεγαλειώδη σύλληψη.

Επειτα, ο Βρετανός μαθηματικός **E. C. Zeeman**, παγκόσμια γνωστός για τη δουλειά του στην Τοπολογία και τη θεωρία διαφορικών δυναμικών συστημάτων, σε μια σειρά πολλών εργασιών και ομιλιών του σε πανεπιστήμια και συνέδρια διαφόρων κλάδων, έδωσε εφαρμογές της Θ. Κ. στη Βιολογία, στη Φυσική, στην Κοινωνιολογία, στις Πολιτικές και Στρατιωτικές Επιστήμες, στην Οικονομία, και ισχυρί-



Διαδοχικές τομές που δείχνουν πώς σπάει το κύμα





στηκε ότι μπορεί να δώσει ερμηνείες και αποδείξεις σε πολλά ζητήματα κάνοντας χρήση μαθηματικών συμπερασμάτων που απορρέουν άμεσα ή έμμεσα από αυτή τη θεωρία.

Αυτό όμως είχε ως αποτέλεσμα να τύχει πολεμικής κριτικής από ειδικούς των επιμέρους επιστημών, στων οποίων τα προβλήματα αναφερόταν. Γιατί οι επιστήμονες αυτοί μπορούσαν να εξάγουν μερικά από τα ίδια συμπεράσματα χωρίς τη χρήση της Θ. Κ. που απαιτούσε προχωρημένο μαθηματικό λογισμό. Μάλιστα, τα συμπεράσματά τους διατυπώνονταν σε απλούστερη γλώσσα, πιο προσιτή στο κοινό. Με άλλα λόγια, αυτός ο υπέρμετρος ενθουσιασμός του Zeeman έδωσε μεγαλύτερη έκταση από εκείνη που πίστευε ο Thom για τη θεωρία του και έβλαψε σε κάποιο βαθμό την αποδοχή της.

«Για τον πολύ κόσμο η Θεωρία των Καταστροφών έχει θεωρηθεί το μεγαλύτερο πράγμα στα Μαθηματικά» γράφει ο Stephen Smale στην κριτική του για το βιβλίο του Zeeman **«Catastrophe Theory: Selected Papers, 1972-1977)»**. Ο Smale, ο οποίος είχε για πολλά χρόνια στενή προσωπική και επιστημονική σχέση με τους Thom και Zeeman, είχε εκφραστεί δημοσίως σε ομιλίες του εναντίον της εικόνας που εδημιουργείτο για τη Θεωρία των Καταστροφών. Ο ίδιος πίστευε ότι οι ερευνητές της «έχουν δημιουργήσει εσφαλμένη εικόνα στη μαθηματική κοινωνία και στο κοινό» για τη δύναμη της Θ.Κ. να επιλύει προβλήματα στις κοινωνικές και φυσικές επιστήμες. Παραπέμπει μάλιστα σε δημοσιεύματα του διεθνούς Τύπου, όπως *L' Express, Newsweek, London Times Review*, που παρουσίαζαν τη Θεωρία των Καταστροφών ως την πιο σημαντική πρόοδο που έχει γίνει στα Μαθηματικά τα τελευταία 300 χρόνια και συνέκριναν τον R. Thom με τον Νεύτωνα και το βιβλίο του για τη Δομική Ευστάθεια και Μορφογένεση με τα Principia του Νεύτωνα.

Προσπαθεί όμως στην κριτική του να είναι αντικειμενικός και εξαίρει το καθαρά μαθηματικό σκέλος της Θ.Κ.: «Τα μαθηματικά θεωρήματα που διατυπώνει ο Thom (και αργότερα αποδεικνύονται από τον **John Mather**, καθηγητή του Πανεπιστημίου του Princeton) πραγματικά δίνουν την ταξινόμηση των στοιχειωδών καταστροφών σύμφωνα με τη θεωρία των ιδιομορφιών των απεικονίσεων σε αντίθεση με τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων» υποστήριζε ο Smale.

René Thom

Μάλιστα στο ερώτημα «τι είναι η Θ.Κ.» ο Smale παραθέτει τα λόγια του Thom: «...μπορεί να θεωρηθεί ως μία θεωρία γενικής μορφολογίας», αλλά και του Zeeman «... Θ.Κ. είναι μια νέα μαθηματική μέθοδος που περιγράφει την εξέλιξη μορφών στη φύση».

Ο ίδιος ο Thom γράφει ότι «η αλήθεια είναι πως η Θ. Κ. δεν είναι μια μαθηματική θεωρία, αλλά ένα σώμα από ιδέες». «Μερικοί είπαν ότι είναι μια κακή επιστήμη και μια κακή φιλοσοφία. Ίσως έχουν δίκιο. Αλλά εμένα μου φαίνεται να είναι κάτι αρκετά πρωτότυπο και δουλεύει αρκετά καλά».

Κατά τη διάρκεια διαλείμματος συνεδρίου για τα 60χρονα του δασκάλου μου Stephen Smale (Fields Medal των Μαθηματικών) στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Μπέρκλεϊ, που έγινε τον Αύγουστο του 1990, ρώτησα τον René Thom, αν υπάρχει κάποια νέα εξέλιξη στη Θεωρία Καταστροφών κι εκείνος μου είπε στο αυτί «Θεμιστοκλή, ας μη μιλάμε τώρα για τη Θεωρία Καταστροφών, γιατί δεν αρέσει στον κόσμο».

Σε μια συζήτηση που είχαμε δυο χρόνια αργότερα στο γραφείο του στο Institut Des Hautes Etudes Scientifiques, έξω από το Παρίσι, μου επανέλαβε ότι η Θ.Κ. δεν είναι μια μαθηματική θεωρία, αλλά Μαθηματικά που εφαρμόζονται κυρίως σε φυσικές και βιολογικές επιστήμες. Είναι ένα μαθηματικό τέχνασμα που εφαρμόζεται σε πολλούς κλάδους.

Το σύμπαν που ζούμε δεν είναι χάος, κατά τον René Thom. Αντιλαμβανόμαστε εντός του όντα και πράγματα στα οποία μάλιστα δίνουμε και ονόματα. Αυτά τα όντα ή πράγματα είναι μορφές ή δομές προικισμένες με ένα βαθμό ευστάθειας. Καταλαμβάνουν ένα μέρος του χώρου και ζουν για ένα χρονικό διάστημα. Η ύπαρξη του κάθε όντος έχει σύνορο. Ετσι, κάθε μορφή είναι μεμονωμένη. Επομένως το σύνολο αυτών των μορφών είναι ασυνεχές.

Το καινούργιο που πρόσφερε στη μαθηματική σκέψη ο Thom είναι ο λογισμός που προϋποθέτει την ασυνέχεια. Τη θεωρία του αυτή αναπτύσσει στο βιβλίο του «Δομική ευστάθεια και Μορφογένεση» (1972). Απευθύνεται κυρίως σε βιολόγους και ειδικούς άλλων επιστημών, οι οποίοι αρνούνταν μέχρι τότε να εφαρμόσουν μαθηματικές μεθόδους για την επίλυση των δικών τους προβλημάτων. Εισήγαγε την έννοια του γενικευμένου αναπτύγματος (universal unfolding) μιας ιδιομορφίας. Χρειαζόταν όμως να γνωρίζει κανείς βασικές έννοιες από τη Διαφορική Τοπολογία και την κλασική Μηχανική για να κατανοήσει το περιεχόμενό του, όπως π.χ. διαφορίσιμες πολλαπλότητες, διανυσματικά πεδία, δυναμικά συστήματα κ.ά.

Ακόμη δεν έχει αποσαφηνιστεί αν πράγματι η Θεωρία Καταστροφών αποτελεί μια μεγάλη στιγμή για την Ιστορία των Μαθηματικών σε σχέση με τις εφαρμογές της. Ο Thom όμως με τη μαθηματική και φιλοσοφική του σκέψη εξέπεμψε μηνύματα που έχουν σχέση με τη συνέχεια και την ασυνέχεια της ζωής στον πλανήτη, τα οποία σήμερα είναι δραματικά επίκαιρα. Αναφερόμενος στον πόλεμο με όπλα μη συμβατικά, μου είχε πει ότι «όπως πάμε η ζωή στην ανθρωπότητα δεν θα κρατήσει για πολύ. Είναι αναμενόμενη μία καταστροφή για να σταματήσει αυτή την εξέλιξη. Είναι πιθανόν η ανθρωπότητα σε ένα μέρος της να διαβεί πολλές αλλαγές, οι οποίες μπορεί να καταλήξουν σε μεγάλη μείωση του πληθυσμού της Γης. Ετσι, αυτοί που θα επιζήσουν θα είναι για ένα χρονικό διάστημα πιο ευτυχισμένοι».

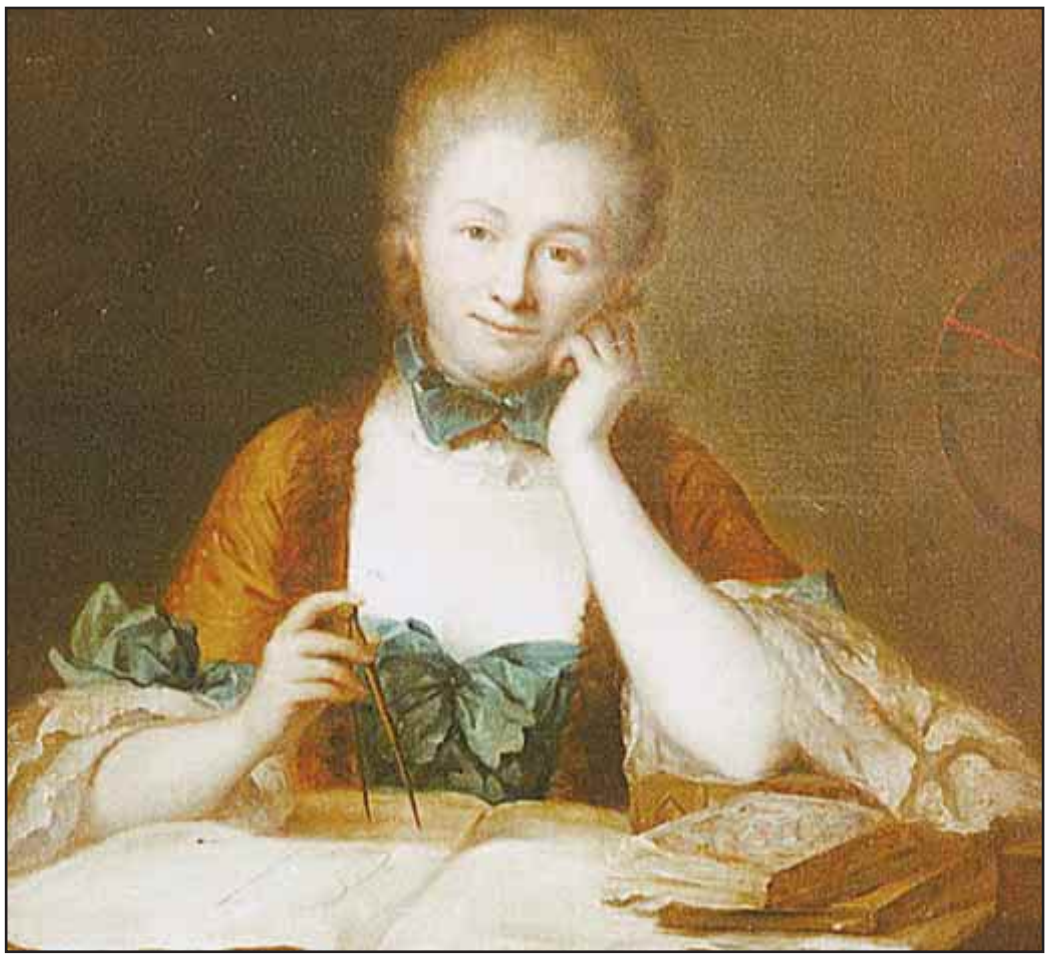
*Ο **ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ Μ. ΡΑΣΣΙΑΣ** είναι αν. καθηγητής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου*

Από την Υπατία (375-415 μ.Χ.) μέχρι το 15ο αιώνα, κανένα άλλο όνομα δεν κατέγραψε η Ιστορία

Γυναίκες και Μαθηματικά

Της ΧΡΙΣΤΙΝΑΣ Π. ΦΙΛΗ*

Μέχρι τις αρχές του 20ού αιώνα οι γυναίκες οι οποίες διέπρεψαν στα Μαθηματικά ήταν λίγες γιατί λίγες είχαν τη δυνατότητα να σπουδάσουν αυτή την επιστήμη. Ισως να υπήρξαν και άλλες, που η Ιστορία δεν κατέγραψε την προσφορά τους. Στο αφιέρωμα αυτό θα παρουσιάσουμε τις γυναίκες εκείνες που με τις εκπληκτικές τους ικανότητες και την αδάμαστη θέλησή τους κατόρθωσαν να διακριθούν σ' ένα τόσο αποκλεισμένο γι' αυτές χώρο.



ΑΙΜΙΛΙΑ ΝΤΕ ΜΠΡΕΤΕΪΓ

ΜΑΡΙΑ ΑΝΙΕΖΙ

ΣΟΦΙΑ ΚΟΒΑΛΕΦΣΚΑΓΙΑ

Το έργο που άφησαν και οι διεθνείς διακρίσεις τους

ΤΖΟΥΛΙΑ ΡΟΜΠΙΝΣΟΝ

ΕΜΙ ΝΕΤΕΡ

Στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, η **Υπατία** (375 - 415 μ.Χ.) αποτελεί τη σημαντικότερη γυναικεία μορφή. Κόρη του Θέωνος του Αλεξανδρέως, ξεπέρασε, κατά τις μαρτυρίες, τον πατέρα της και δάσκαλό της. Σύμφωνα με το λεξικό Σουίδα έγραψε «υπόμνημα εις Διόφαντον», αστρονομικό κανόνα και υπόμνημα στα Κωνικά του Απολλωνίου, ενώ ο Δαμάσκιος την ονομάζει «γεωμετρική». Από πρόσφατες έρευνες ελληνικών, αραβικών και λατινικών χειρογράφων διαφαίνεται ότι έγραψε και άλλα μαθηματικά έργα, όπως κάποια μέρη από τα σχόλια του πατέρα της στη *Μεγίστη* του Πτολεμαίου, στην *Κύκλου Μέτρησιν* του Αρχιμήδους και ένα κείμενο για ισοπεριμετρικά σχήματα. Με τη δημόσια διδασκαλία των Μαθηματικών και της Φιλοσοφίας αποκτά ανυπέρβληπτο κύρος καθώς και αρκετούς μαθητές.

Από την εποχή της Υπατίας μέχρι και το 15ο αι. κανένα γυναικείο όνομα δεν έχει διασωθεί στην Ιστορία των Μαθηματικών. Ομως γυναίκες της άρχουσας τάξης αρχίζουν να διδάσκονται και να μελετούν Μαθηματικά. Στην πρώτη αυτή φάση δεν υπάρχουν γυναίκες-πρωταγωνίστριες, αλλά περιορίζονται σε ρόλους καλύτερης μαθήτριας ή καλύτερης συνεργάτιδος, όπως η **Μαρία Κούνιτς** που γεννήθηκε γύρω στα 1610. Μαζί με το σύζυγό της Ελία βαν Λέβεν (γιατρό και μαθηματικό) ασχολήθηκε σοβαρά με τα Μαθηματικά και μάλιστα συνέταξε αστρονομικούς πίνακες. Ακόμα, αξίζει να αναφέρουμε την **Αννα Ράινχαρτ** από το Βίντερτουρ. Η εργασία της για το πρόβλημα της καμπύλης του Μοπερτουί έγινε ευνοϊκά αποδεκτή από τους Ντανιέλ και Γιόχαν Μπερνούλι.

Την εποχή εκείνη ο Βιέτ -που προσπαθεί να ταυτίσει την ελληνική ανάλυση με την καινούργια άλγεβρα- έχει μαθήτρια την **Κατερίνα ντε Παρτενέ**, πριγκίπισσα Ροάν-Σουμπίζ. Ο Καρτέσιος διδάσκει τη βασίλισσα **Χριστίνα** της Σουηδίας και την Ελισάβετ της Βοημίας. Η **Σοφία**, εκλέκτωρ του Αννοβέρου, καθώς και η κόρη της **Σοφία-Καρλότα**, βασίλισσα της Πρωσίας (μητέρα του Μεγάλου Φρειδερίκου), μαθητεύουν δίπλα στον Λάιμπνιτς. Ενας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, ο Οϊλερ γράφει τα περίφημα *Γράμματα σε μια Γερμανίδα πριγκίπισσα* για να διδάξει Μαθηματικά και Φυσική στην πριγκίπισσα Ανχαλτ-Ντεσάου.

Ενα μέρος από το πολύπλευρο έργο του Νεύτωνα μελετάται από την **Καρολίνα** του Μπράντεμπουργκ, ενώ η **Αιμιλία ντε Μπρετέιγ**, μαρκησία του Σατελέ (1706-1749), η οποία σπουδάζει συστηματικά Μαθηματικά και Φιλοσοφία με τους Μοπερτουί και Κένιχ, είναι σε θέση να κατανοήσει τα μνημειώδη Principia του Νεύτωνα. Τα μεταφράζει στα γαλλικά και μάλιστα τα συμπληρώνει με δικά της σχόλια και σημειώσεις. Η μετάφρασή της κυκλοφόρησε στο Παρίσι δέκα χρόνια μετά το θάνατό της και παραμένει δόκιμη μέχρι σήμερα.

Η **Μαρία Ανιέζι** (1718-1799), κόρη καθηγητή Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια, δείχνει από μικρή το ταλέντο της για τα Μαθηματικά (και όχι μόνο, καθώς σε ηλικία 11 χρόνων μιλά επτά γλώσσες). Ο πατέρας της, περήφανος γι' αυτήν, την ενθαρρύνει να συνεχίσει. Το όνομά της επέζησε μέχρι σήμερα με το δίτομο βιβλίο της *Αναλυτικοί θεσμοί προς χρήση της ιταλικής νεότητας:* Ο πρώτος τόμος αποτελεί μια εκπληκτική για την εποχή της έκθεση της άλγεβρας και της γεωμετρίας. Ο δεύτερος τόμος είναι αφιερωμένος στον Απειροστικό Λογισμό, την καινούργια επιστήμη, δημιούργημα του Νεύτωνα και τουΛάιμπνιτς. Για το δεύτερο αυτό τόμο, οι κριτές της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών δήλωσαν πως αποτελεί την πληρέστερη και την καλύτερη επιστημονική προσφορά στο είδος του. Με τη σύμφωνη γνώμη των Νταλαμπέρ, Κοντορ-

Η αρχαία Ελλάδα, κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης

Του ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΕΞΑΡΧΑΚΟΥ*

Ολόκληρος ο δυτικός πολιτισμός γεννήθηκε και αναπτύχθηκε έχοντας ως βάση τον τρόπο σκέψης που χάραξαν, διαμόρφωσαν και δίδαξαν οι αρχαίοι Ελληνες. Για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα ο νους δεν ικανοποιείται με τις μυθολογικές ερμηνείες του κόσμου. Ο μελετητής δεν αρκείται να δώσει πρακτικές απαντήσεις στα προβλήματα, αλλά προσπαθεί να επεκταθεί παραπέρα σε όλα τα νοητά αντίστοιχα προβλήματα, να οδηγηθεί σε γενικεύσεις και σε αφαιρέσεις, να οικοδομήσει τον ορθό λόγο για να διατυπώσει με σαφήνεια έννοιες, ορισμούς και νόμους γενικούς. Αυτή η μετάβαση από το μύθο στο λόγο, στην επιστημονική σκέψη, ήταν ένα θαύμα, μια τομή, μια επανάσταση.

Η Φιλοσοφία γεννήθηκε τον 6ο π.Χ. αιώνα στην Ιωνία και η εξάπλωσή της στις υπόλοιπες ελληνικές πόλεις ήταν η απαρχή μιας λαμπρής πορείας του ελληνικού πνεύματος στην αναζήτηση της αλήθειας, όχι για να εξυπηρετήσει πρακτικές ανάγκες, αλλά για να ικανοποιήσει πνευματικές ανησυχίες και αναζητήσεις.

Τα Μαθηματικά ήταν ένα ευρύτατο πεδίο πνευματικής αναζήτησης γί΄ αυτό ασχολήθηκαν μαζί τους όλοι σχεδόν οι φιλόσοφοι εκείνης της εποχής.

Η απόδειξη, που έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην πορεία εξέλιξης των Μαθηματικών, ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους, συστηματοποιήθηκε από τον Πλάτωνα και κυρίως από τον Αριστοτέλη, χρησιμοποιήθηκε σε περισσότερο τελειοποιημένη μορφή από τον Ευκλείδη και θα μπορούσαμε να πούμε ότι τελειοποιήθηκε από τον Αρχιμήδη.

Η σύλληψη της ιδέας της αξιωματικής θεμελίωσης οφείλεται στους αρχαίους Ελληνες. Κλασικό παράδειγμα είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στοιχεία όμως αξιωματικής θεμελίωσης βρίσκουμε και σε άλλα αρχαία ελληνικά κείμενα. Οι Πυθαγόρειοι π.χ. είχαν διευκρινίσει ότι η αποδεικτική διαδικασία πρέπει να έχει κάποια δεδομένα (τις υποθέσεις), και κάποιους αρχικούς συλλογισμούς. Ο Αριστοτέλης επίσης μας δίνει όλα τα στοιχεία μιας αξιωματικής θεμελίωσης. Αναφέρεται στις αρχικές έννοιες, –τις θέσεις, όπως τις ονομάζει– στους ορισμούς, στα αξιώματα, στην αποδεικτική διαδικασία και στην απόδειξη. Η αξιωματική θεμελίωση που ανέπτυξαν οι αρχαίοι Ελληνες είναι ίδια με εκείνη που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Η Θεωρία Αριθμών είναι ένας άλλος τομέας που η επινόησή του οφείλεται στους Ελληνες. Για την ανάπτυξη αυτής της θεωρίας σημαντική ήταν η συμβολή των Πυθαγορείων, του Πλάτωνα στην Ακαδημία, καθώς και του Ευκλείδη με το έργο του «Στοιχεία». Καθοριστική ήταν επίσης συμβολή του Αρχιμήδη και του Διόφαντου.

Η Γεωμετρική Αλγεβρα είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Οι Ελληνες έλυναν πολλά προβλήματα της Αριθμητικής με τη βοήθεια της Γεωμετρίας, αλλά και πολλά γεωμετρικά προβλήματα με τη χρησιμοποίηση αριθμητικών υπολογισμών. Υπήρχαν έννοιες που μπορούσαν να θεωρηθούν και αριθμητικές και γεωμετρικές. Π.χ. οι αναλογίες, καθώς και η λύση των εξισώσεων μπορούν να θεωρηθούν ως κοινό μέρος της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας.

Η Ανάλυση, που είναι σήμερα ο σημαντικότερος κλάδος των βασικών Μαθηματικών, έχει την αφετηρία της στην αρχαία Ελλάδα. Π.χ. ο Δημόκριτος καθόρισε την έννοια του απειροστού μεγέθους και έκαμε διάκριση μεταξύ φυσικού απειροστού (άτομο) και μαθηματικού απειροστού. Στον Πλάτωνα και στον Αριστοτέλη υπάρχει η έννοια του απείρου και του συνεχούς μεγέθους. Τα παράδοξα του Ζήνωνα περιέχουν την έννοια του ορίου, της συνέχειας, καθώς και του αρθροίσματος των απείρων όρων μιας ακολουθίας.

Στα έργα των Πυθαγορείων, του Εύδοξου και του Αρχιμήδη υπάρχουν τόσα και τέτοια στοιχεία μαθηματικής Ανάλυσης, ώστε τα έργα αυτά σήμερα θεωρούνται ως οι πρωτοπόροι της δημιουργίας του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

Η Γεωμετρία είναι καθαρά ελληνική επιστήμη. Ο Ευκλείδης με τα Στοιχεία του οδηγεί τον τρόπο σκέψης της ανθρωπότητας για 2.300 χρόνια.

Η Αστρονομία ως επιστήμη βρήκε επίσης πρόσφορο έδαφος ανάπτυξης στην αρχαία Ελλάδα. Ο Θαλής, ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι είχαν κάνει αρκετές αστρονομικές παρατηρήσεις και μετρήσεις. Είναι γνωστή η θεωρία του Αρίσταρχου του Σαμίου για τις κινήσεις της Γης. Ο Αρχιμήδης κατασκεύασε αρκετά αστρονομικά όργανα, με τα οποία υπολόγιζε το μέγεθος της Γης, της Σελήνης και του Ηλίου, την απόσταση της Γης από τον Ηλιο και τους πλανήτες, το μήκος της τροχιάς της Γης κ.λπ. Το έργο του Πτολεμαίου και του Ιππαρχου υπήρξε πηγή αναφοράς για όλους τους μεταγενέστερους αστρονόμους.

Ετσι, η αρχαία Ελλάδα υπήρξε η κοιτίδα όχι μόνο της μαθηματικής σκέψης αλλά και της επιστημονικής σκέψης γενικότερα.

*Ο **ΘΕΟΔΩΡΟΣ Γ. ΕΞΑΡΧΑΚΟΣ** είναι καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών και πρώην πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*

σέ και Βαντερμόντε, το βιβλίο μεταφράζεται στα γαλλικά υπό την αιγίδα της Γαλλικής Ακαδημίας. Αργότερα, ο Τζον Κόλσον, καθηγητής Μαθηματικών στο Κέμπριτζ, μαθαίνει ιταλικά μόνο και μόνο για να μπορεί να μεταφράσει το βιβλίο αυτό στα αγγλικά (1801).

Η κόρη ενός μεγαλεμπόρου μεταξιού στο Παρίσι, η **Σοφία Ζερμέν** (1776-1831), όταν σε ηλικία 13 χρόνων διαβάζει από την Ιστορία των Μαθηματικών του Μοντούκλα το τέλος του Αρχιμήδη, αποφασίζει να μελετήσει αυτή την επιστήμη, η οποία «σε απορροφά τόσο πολύ ώστε να αψηφάς ακόμα και το θάνατο». Ο πατέρας της κάνει το κάθε τι για να την αποτρέψει (την αφήνει χωρίς θέρμανση, χωρίς φως) αυτή όμως μελετά μόνη της Μαθηματικά για να φοιτήσει στην Εκόλ Πολιτεκνίκ, αλλά τότε οι γυναίκες δεν γίνονταν δεκτές. Εκείνη ωστόσο αποκτά τις σημειώσεις των μαθημάτων και διαπρέπει παρουσιάζοντας (με το ανδρικό ψευδώνυμο Λε Μπλαν) την εργασία της στον Λαγγράνζ, ο οποίος αναγνωρίζει το ταλέντο της, γνωρίζει την ταυτότητά της και την εισάγει στους επιστημονικούς κύκλους. Οταν ο Γκάους παρουσιάζει τις *Μαθηματικές Ανακαλύψεις* (1801) η Σοφία του στέλνει τα αποτελέσματά της στη Θεωρία Αριθμών χρησιμοποιώντας και πάλι το όνομα του Λε Μπλαν. Το 1811, η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών προκηρύσσει το μεγάλο βραβείο με θέμα τα παλλόμενα ελάσματα. Μέχρι το 1816 καμιά εργασία δεν κρίνεται άξια για το βραβείο. Τη χρονιά εκείνη η μελέτη της Σοφίας καταπλήσσει τους ακαδημαϊκούς και της απονέμεται το Μεγάλο Βραβείο (Γκραν Πρι).

Την ίδια περίπου εποχή στην Αγγλία, η **Μαίρη Φέρφαξ** (1780-1872), κόρη Σκοτσέζου ναυάρχου, συναντά δυσκολίες στην επιθυμία να μελετήσει Μαθηματικά. Ο γάμος της με τον εξάδελφό της Σόμερβιλ τη βγάζει απ' αυτό το αδιέξοδο. Υποδειγματική σύζυγος και μητέρα, η Σόμερβιλ (με αυτό το όνομα έγινε γνωστή) μεταφράζει την *Ουράνια Μηχανική* του Λαπλάς (1831), όπου προσθέτει δικά της σχόλια και σημειώσεις, αναμφισβήτητης αξίας. Για το επιστημονικό της έργο, που περιλαμβάνει πολλές μελέτες στα Μαθηματικά και στη Φυσική, τιμήθηκε και συνταξιοδοτήθηκε από τη βασίλισσα Βικτωρία.

Η **Αυγούστα Αντα Μπάιρον** (1815-1852), κόρη του μεγάλου φιλέλληνα ποιητή από το γάμο του με την Ισαβέλλα Μίλμπεϊνκ, ανατρέφεται μακριά από κάθε πατρική επίδραση, μελετά μόνη της Μαθηματικά, συμβουλευόμενη τους γνωστούς μαθηματικούς Φρεντ και ντε Μόργκαν. Το 1833 συναντά τον Τσαρλς Μπάμπατζ, κατασκευαστή λογιστικής μηχανής προδρόμου των ηλεκτρονικών υπολογιστών, και ενδιαφέρεται για την πραγμάτωσή της. Χάρη στο σύζυγό της, κόμη Λόβαλαϊς, μέλος της Βασιλικής Εταιρείας, έχει πρόσβαση σε βιβλία απαραίτητα για τις σπουδές της. Το 1843 κυκλοφορεί τη μετάφραση (17 σελίδες) της εργασίας του Μεναμπρέα σχετική με την αναλογική μηχανή του Μπάμπατζ, την οποία υπογράφει μόνο με τα αρχικά της Α.Α.Λ. Στο συμπλήρωμα της μετάφρασης με τις σημειώσεις της (40 σελίδες) επεξηγεί τη λειτουργία της μηχανής, αλλά περιγράφει και την επίλυση ειδικών προβλημάτων. Ετσι περιγράφει -αυτό που σήμερα ονομάζουμε πρόγραμμα υπολογιστή- το πρόγραμμα υπολογισμού των αριθμών του Μπερνούλι.

Ενώ στα περισσότερα κοριτσίστικα δωμάτια οι τοίχοι ήσαν στολισμένοι με παραστάσεις από το ζωικό ή το φυτικό βασιλείο, οι τοίχοι του δωματίου της **Σοφίας Κρουκόφσκι** (1850-1891) στο εξοχικό σπίτι της οικογένειάς της ήταν καλυμμένοι από τις λιθογραφημένες σημειώσεις του Οστρογράντσκι, σχετικές με το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Ο θείος της της μιλά για τα μεγάλα προβλήματα των Μαθηματικών, όπως π.χ. για τον τετραγωνισμό του κύκλου. Χαρακτηριστικά μας αναφέρει η ίδια «πως παρ' όλο που η σημασία των λέξων μου ήταν ακατανόητη, σιγά σιγά έμπαιναν στο νου μου και μου ενέπνεαν για τα Μαθηματικά ένα είδος ευλάβειας, για μια ανώτερη επιστήμη, για μια μυστική επιστήμη, η οποία ανοίγει στους κατηχούμενους έναν υπέροχο καινούργιο κόσμο, απρόσιτο στον κοινό θνητό». Το 1867, μελετά συστηματικά Μαθηματικά με τον καθηγητή της Ναυτικής Ακαδημίας της Αγίας Πετρούπολης Α.Ν. Στρανολικόμπσκι, ο οποίος αναγνωρίζει τις καταπληκτικές ικανότητές της. Η επιθυμία της να σπουδάσει Μαθηματικά δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί καθώς τα ρωσικά πανεπιστήμια δεν δέχονται γυναίκες και η οικογένειά της δεν την αφήνει να φύγει στο εξωτερικό. Η Σοφία γρήγορα λύνει αυτό το πρόβλημα τελώντας έναν εικονικό γάμο με το νεαρό παλαιοντολόγο Βλαδίμηρο Κοβαλέφσκι. Το 1869 το ζευγάρι ζει στη Χαϊδελβέργη όπου η Σοφία Κοβαλέφσκαγια παρακολουθεί μαθήματα με τους Κίρχοφ, Χέλμολτς, Κενιχσμπέργκερ και Ντι Μπουά-Ρεϊμόν. Το 1871 πηγαίνει στο Βερολίνο για να δει και να συμβουλευθεί τον Βάιερστρας. Εκείνη την εποχή, το Πανεπιστήμιο του Βερολίνου είναι κλειστό για τις γυναίκες και παρ' όλες τις προσπάθειες του Βάιερστρας δεν κατορθώνει να γίνει δεκτή ως φοιτήτρια. Τότε, ο μεγάλος μαθηματικός αποφασίζει να της παραδίδει για τέσερα χρόνια ιδιαίτερα μαθήματα. Το 1874 έχοντας παρουσιάσει τρεις ερευνητικές εργασίες της για μερικές διαφορικές εξισώσεις, για αβελιανά ολοκληρώματα και για τους δακτύλιους του Κρόνου, γενικεύοντας τις εργασίες του Λαπλάς, της απονέμεται ο τίτλος της διδάκτορος in absentia από το Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν. Είναι η πρώτη γυναίκα που αποκτά διδακτορικό δίπλωμα στην Ευρώπη.

1874: Η Σοφία Κοβαλέφσκαγια, η πρώτη με διδακτορικό στην Ευρώπη

Ομως ούτε η διδακτορική της διατριβή ούτε οι συστατικές επιστολές του Βάιερστρας μπόρεσαν να τη βοηθήσουν για να αρχίσει την ακαδημαϊκή της σταδιοδρομία και απογοητευμένη επιστρέφει στην πατρίδα της, όπου και εκεί δεν μπορεί να εργαστεί. Μεγάλα οικογενειακά προβλήματα την αποσπούν προσωρινά από την επιστήμη της. Ο Βάιερστρας τη συμβουλεύει να ασχοληθεί με το πρόβλημα διάδοσης του φωτός σε κρυστάλλους και το 1883 χάρη στις προσπάθειες των Μίταχ - Λέφλερ διδάσκει Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο της Στοκχόλμης. Το 1889 αποκτά θέση καθηγήτριας στο ίδιο πανεπιστήμιο και γίνεται η πρώτη γυναίκα-καθηγήτρια στην εποχή της. Το 1888 κερδίζει το βραβείο Μπορντέν της Γαλλικής Ακαδημίας για τη μελέτη της: Περιστροφή στερεού σώματος γύρω από σταθερό σημείο. Μάλιστα, για να δείξει την αξία του έργου της Κοβαλέφσκαγια, η Γαλλική Ακαδημία ανεβάζει το χρηματικό έπαθλο του βραβείου από 3.000 φράγκα σε 5.000 φράγκα. Το 1889 κερδίζει και το βραβείο της Σουηδικής Ακαδημίας Επιστημών και την ίδια χρονιά εκλέγεται αντεπιστέλλον μέλος της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών.

Η **Εμι Νέτερ** (1882-1935), κόρη του διάσημου αλγεβρίστα και καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Ερλάγκεν, Μαξ Νέτερ, αν και σπουδάζει ξένες γλώσσες και μουσική, στρέφεται τελικά στα Μαθηματικά παρακολουθώντας τα μαθήματα ως ακροάτρια. Οταν το 1904 το πανεπιστήμιο αποδέχεται επίσημα την εγγραφή γυναικών η Νέτερ ονομάζεται φοιτήτρια και σε τέσσερα χρόνια αποκτά το διδακτορικό της δίπλωμα. Το 1915 ο Χίλμπερτ την καλεί στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν αν και το φύλο της την εμποδίζει να ονομαστεί πανεπιστημιακός δάσκαλος. Ο Χίλμπερτ εκτιμώντας αφάνταστα τις έρευνές της δίνει μάχες με τους φιλοσόφους και τους ιστορικούς, οι οποίοι αντιμετωπίζουν εχθρικά τη Νέτερ. Χαρακτηριστικά διηγούνται πως κάποτε ο Χίλμπερτ χάνοντας την υπομονή του δήλωσε: «Δεν καταλαβαίνω γιατί το φύλο της υποψήφιας αποτελεί αρνητικό επιχείρημα για το διορισμό της ως πριβάτ ντοτσέντ, στο κάτω κάτω εδώ δεν είναι θαλάσσια λουτρά». Μετά το τέλος του Α' Παγκοσμίου Πολέμου, καθώς άλλαξαν οι συνθήκες στη Γερμανία, η Νέτερ αποκτά το δικαίωμα να διδάξει στο πανεπιστήμιο και μετά το 1922 παίρνει και ένα πενιχρό μισθό. Με τις εργασίες της, άλλαξε τη μορφή της σύγχρονης άλβεγρας και το 1932 είναι η μόνη γυναίκα μαθηματικός, η οποία δίδει ωριαία διάλεξη στο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο στη Ζυρίχη. Με την άνοδο των ναζί χάνει τη θέση της και μεταναστεύει στις ΗΠΑ μαζί με άλλους συναδέλφους της.

Εδώ και αρκετές δεκαετίες η κατάσταση έχει ριζικά αλλάξει καθώς στη διεθνή μαθηματική κοινότητα συμμετέχουν ενεργά πολλές γυναίκες. Το 1980 η Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία αποκτά την πρώτη γυναίκα πρόεδρο, τη διάσημη για τις έρευνές της στη Θεωρία Αριθμών, **Τζούλια Ρόμπινσον**, μέλος της Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών.

Οταν στα τέλη του 21ου αιώνα γραφτεί η Ιστορία των Μαθηματικών, είναι βέβαιο ότι θα περιέχει πάρα πολλά γυναικεία ονόματα.

** Η **ΧΡΙΣΤΙΝΑ Π. ΦΙΛΗ**, είναι επίκουρη καθηγήτρια του ΕΜΠ, Docteur d' Etat και αντεπιστέλλον μέλος της Διεθνούς Ακαδημίας της Ιστορίας των Επιστημών*

Πρόβλεψη για την τιμή μιας μετοχής: πώς και πότε μπορεί να γίνει

Χρηματιστήριο - κοινωνία: μια μαθηματική προσέγγιση

Του δρος ΓΡΗΓΟΡΗ Α. ΜΑΚΡΙΔΗ*

Αιώνες τώρα ο κόσμος προσπαθεί να έχει δομημένη και οργανωμένη ζωή, γι' αυτό έχουμε νομικό σύστημα, οργανοδιαγράμματα, χρονοδιαγράμματα, γραφειοκρατία, ρολόγια και ημερολόγια, για να συντονίζουν τις καθημερινές μας δραστηριότητες. Δημοσιεύουμε εγκυκλοπαίδειες, λεξικά, βιβλία, εφημερίδες, περιοδικά, ιστοσελίδες, για να οργανώσουμε τη γνώση. Οσο όμως και αν προσπαθούμε να οργανώσουμε τη ζωή μας, πάντα έρχεται αυτή η μέρα την οποία δεν έχουμε προβλέψει, δεν έχουμε σκεφτεί, και όλα αυτά γιατί ο αριθμός των παραμέτρων που συντονίζουν τη ζωή μας είναι ίσως χίλιες φορές πολλαπλάσιος αυτών που μπορέσαμε να σκεφτούμε ή προλάβαμε να υπολογίσουμε. Γενικά, δεν υπάρχει γνωστή ή προβλεπόμενη ακολουθία γεγονότων στη ζωή μας, πόσο μάλλον δεν πρέπει να αναμένουμε ότι θα υπάρχει στα οικονομικά ή στο χρηματιστήριο.

Το χρηματιστήριο καθρεφτίζει τη ζωή μιας κοινωνίας, τον τρόπο που αντιδρά, που σκέφτεται, που παρασύρεται, που πανικοβάλλεται, που ρισκάρει, που μελετά, που καταλαβαίνει, που ξεγελιέται, που αγοράζει και πωλεί. Αν μπορούσε κανείς να μετρήσει αυτούς τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν τη ζωή μιας κοινωνίας, τότε ίσως να μπορέσει να προβλέψει με ακρίβεια τη συμπεριφορά του χρηματιστηρίου στην ίδια την κοινωνία. Οσο πιο μικρή είναι η κοινωνία που ζούμε τόσο πιο σημαντικοί είναι οι παράγοντες που τη χαρακτηρίζουν λόγω της εύκολης επικοινωνίας μεταξύ των ατόμων, της γρήγορης διάδοσης των πληροφοριών και παραπληροφοριών και ιδιαίτερα της ευαισθησίας σε φήμες και της εύκολης επιρροής μερικών «μεγάλων» οικονομικών δυνάμεων.

Τα στοιχεία όμως δείχνουν ότι παρ' όλο που η ζωή μας δεν μπορεί να προβλεφθεί, δεν είναι όμως ούτε τυχαία όπως ούτε η συμπεριφορά του χρηματιστηρίου είναι τυχαία. Αρα αν η συμπεριφορά του χρηματιστηρίου δεν είναι τυχαία και δεν είναι προβλεπόμενη (σταθερού ρυθμού ή περιοδική) τότε τι είναι; Θα προσπαθήσω να δώσω απάντηση σε αυτό το ερώτημα παρακάτω.

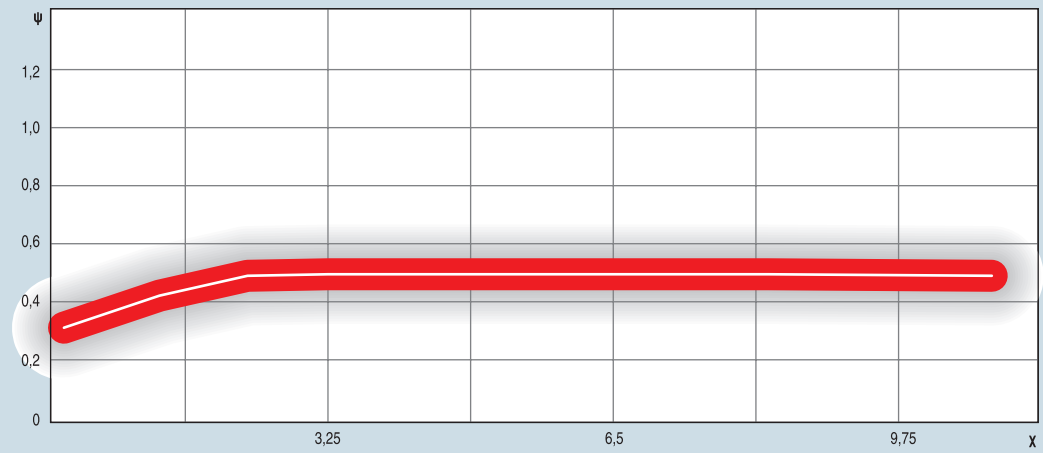
Για να γίνει όμως μια μαθηματική πρόβλεψη, πρέπει πρώτα να έχουμε μελετήσει και μετρήσει τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν την κοινωνία, όπως ανέφερα πιο πάνω, για να μπορέσουμε να τους χρησιμοποιήσουμε στην πρόβλεψή μας, αν μπορεί ποτέ αυτό να γίνει πλήρως. Τώρα το ερώτημα που τίθεται είναι πώς μπορούμε να μετρήσουμε αυτούς τους παράγοντες. Στην πραγματικότητα, το ιστορικό του ιδίου του χρηματιστηρίου τούς μετρά καθημερινά ώστε με την κατάλληλη επεξεργασία των αυξομειώσεων των τιμών των μετοχών μπορούμε να μετρήσουμε πώς συμπεριφέρεται η κοινωνία για κάθε μετοχή ξεχωριστά.

Ισορροπία και φύση

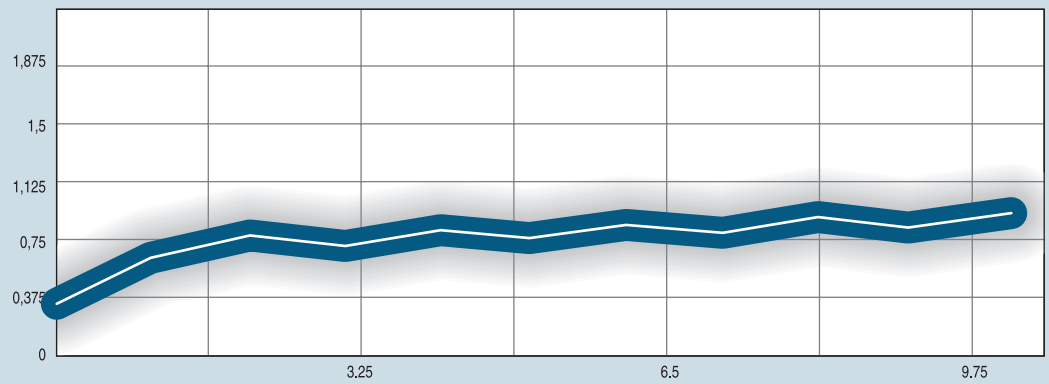
Ενα σύστημα βρίσκεται σε αδράνεια, ή αν θέλετε σε ισορροπία, αν δεν υπάρχουν εξωγενείς επιδράσεις σε αυτό. Οι οικονομολόγοι ορίζουν μια κατάσταση ως ισορροπία όταν όλα ισοζυγούν, δηλαδή όταν η ζήτηση προϊόντων ισούται με τη διάθεση/παραγωγή των προϊόντων. Μια μικρή αλλαγή στο σύστημα από εξωγενείς παράγοντες θα οδηγήσει το σύστημα σε αστάθεια. Το σύστημα αντιδρά αμέσως δότι επιθυμεί να βρίσκεται σε ισορροπία. Για να εξηγήσουμε λίγο το φαινόμενο αυτό θα δώσω δύο φυσικά παραδείγματα. Οταν ένα εκκρεμές βρίσκεται σε αδράνεια και το μετακινήσουμε λίγο αρχίζει να ταλαντεύεται μέχρι να επανέλθει στην αρχική του αδρανή κατάσταση, δηλαδή το σύστημα αντιδρά από μόνο του για να επανέλθει στην ισορροπία. Η οικονομική ισορροπία της παραγωγής και διάθεσης ενός προϊόντος είναι να πωλείς όσα παράγεις και αυτό επιτυγχάνεται για μια τιμή η οποία ονομάζεται τιμή ισορροπίας. Οταν αυξήσουμε την τιμή του προϊόντος τότε η ζήτηση αρχίζει να μειώνεται και αφού η ζήτηση μειώνεται τότε το πλεόνασμα θα προκαλέσει τη μείωση της παραγωγής για να επανέλθει το σύστημα σε ισορροπία.

Η ίδια η φύση όμως απορρίπτει τελικά την ισορροπία, γι' αυτό και χάνονται ζωικά είδη ενώ άλλα αναπτύσσονται επικίνδυνα. Το οικονομικό σύστημα της Σοβιετικής

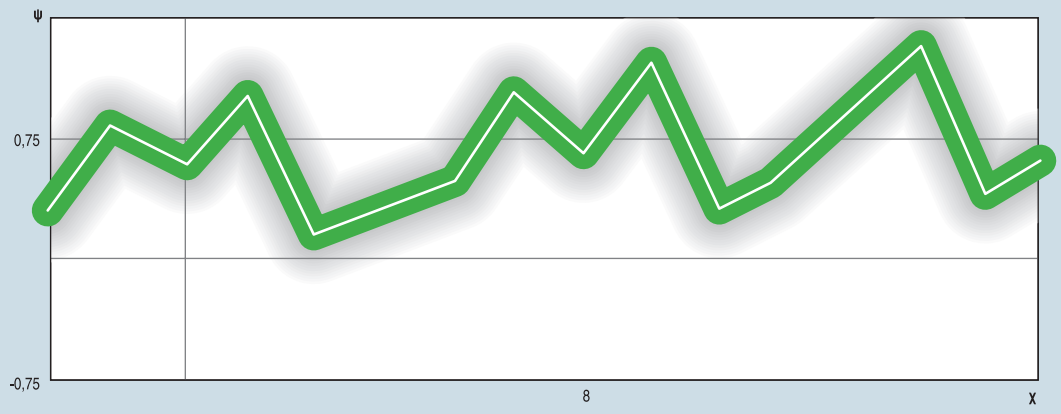
Διάγραμμα 1 P (O)=0,30, λ=2



Διάγραμμα 2 P (O)=0,30, λ=3



Διάγραμμα 3 P (O)=0,30, λ=4



Τα Μαθηματικά και οι Νέες Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ)

Του Α. ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΥ

Η ανάπτυξη της πληροφορικής και των νέων τεχνολογιών, γενικότερα, στηρίχτηκε στα μαθηματικά. Και φυσικά, οι μαθηματικοί είναι στην πρωτοπορία όλων των διαδικασιών που ανωτέρω περιγράψαμε.

Η ενσωμάτωση των ΤΠΕ στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών έγινε με μεγάλη επιτυχία, καθημερινά, δε, έχουμε και νέα επιτεύγματα στον τομέα αυτό.

Η γλώσσα Logo και η χελώνα της βοηθάει ακόμα και μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες να προσεγγίσουν τη μαθηματική γνώση. Τα παιδιά χρησιμοποιούν τη χελώνα για να εξερευνήσουν και επεξεργαστούν μαθηματικά σχήματα, σχέσεις, έννοιες και ιδέες. Η Logo θεωρείται εργαλείο σκέψης, ιδιαίτερα για επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Είναι μια γλώσσα προγραμματισμού, που έχει δυνατότητες διαρκούς επανάληψης, κάτι που προσφέρει πολλά στους μαθητές.

Η χρήση Η/Υ και του κατάλληλου λογισμικού, προσφέρει στο διδακτικό έργο του μαθηματικού σημαντική βοήθεια. Εκτελεί ταχύτατα υπολογισμούς και κατασκευάζει σχήματα και γραφικές παραστάσεις, κερδίζοντας έτσι χρόνο και εμβαθύνοντας με τους μαθητές στη μαθηματική γνώση.

Τα αντικείμενα στα εκπαιδευτικά λογισμικά (γεωμετρικά σχήματα, αριθμοί, παράμετροι, λέξεις κ.λπ.) δεν προσδιορίζονται με τρόπο στατικό και μόνιμο (όπως στο συνηθισμένο περιβάλλον χαρτιού - μολυβιού και μαυροπίνακα), αλλά μπορούν να μετακινηθούν με άμεση, έμμεση ή ρητά εκφρασμένη διαχείριση.

Στην Αλγεβρα, το πρόβλημα της γενίκευσης επιτείνεται από την αδυναμία πραγματοποίησης πράξεων με εγγράμματες παραστάσεις. Η πρώτη επαφή των μαθητών με τις εγγράμματες παραστάσεις πραγματοποιείται μέσω τύπων, χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα. Ωστόσο η εκτέλεση πράξεων μεταξύ εγγράμματων παραστάσεων δεν έχει νόημα για τους νεαρούς μαθητές. Ετσι, η έννοια της μεταβλητής φαίνεται να παρουσιάζει μεγάλες διανοητικές δυσκολίες γι΄ αυτούς.

Οι μαθητές καλούνται να πραγματοποιήσουν ένα διανοητικό άλμα, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, από τον αριθμό στη μεταβλητή. Οι υπολογιστικοί - αριθμητικοί μικρόκοσμοι μπορούν να διευκολύνουν τη μετάβαση αυτή, καθώς καθιστούν περίπου συμπτωματικές τις ιδιαίτερες τιμές των μεταβλητών, δίνοντας σημασία σε αυτό που παραμένει αναλλοίωτο, δηλαδή την αλγεβρική σχέση. Πρέπει να επισημάνουμε εδώ, ότι στα μαθηματικά οι έννοιες έχουν μια διπλή υπόσταση:

Είναι και αντικείμενα διδασκαλίας, αλλά και εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων. Ο πολλαπλασιασμός, για παράδειγμα, είναι αντικείμενο διδασκαλίας στην Γ΄ τάξη του Δημοτικού, αλλά στο Γυμνάσιο αποτελεί εργαλείο.

Συνεπώς, όταν πια η έννοια έχει κατανοηθεί απ΄ το μαθητή, ώστε να μπορεί με άνεση πια να τη χρησιμοποιεί στην επίλυση των προβλημάτων, ο Η/Υ οφείλει να αναλαμβάνει τη διεκπεραίωση των, λογιστικού επιπέδου, εργασιών.

Σε πάμπολλες χώρες του εξωτερικού και σε διάφορα ιδιωτικά σχολεία της χώρας μας χρησιμοποιείται ευρύτατα ο graphic calculator (G.C.), που φέρει τη δύναμη της απεικόνισης και δεν χρειάζεται την προϋπόθεση εκμάθησης λειτουργικού. Στα δημόσια σχολεία δεν έχει εισαχθεί ακόμη επίσημα.

Αξίζει εδώ να αναφέρουμε, ότι τα αποτελέσματα του προγράμματος πειραματικών διδασκαλιών στα μαθηματικά με χρήση G.C., που πραγματοποίησε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1998-1999), ήταν άκρως ενθαρρυντικά.

Και δεδομένου ότι η οργάνωση αιθουσών με ΤΠΕ καθυστερεί σοβαρά, κάτι τέτοιο θα πρόσφερε μια πολύ καλή και γρήγορη λύση.

Κλείνω με μια έκκληση.

Η πλήρης ενσωμάτωση των ΤΠΕ στη διδακτική πράξη προϋποθέτει τη βοήθεια όλων. Πολιτείας, κοινωνίας, σχολικών μονάδων και εκπαιδευτικών. Ας σπεύσουμε, ο καθένας απ΄ την πλευρά του, να την προσφέρουμε.

Ο Α. ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΣ είναι λέκτορας Πανεπιστημίου Αθηνών, επ. σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Η διατήρηση της ισορροπίας είναι χαμένη υπόθεση

Ενωσης απέτυχε γιατί προσπάθησε να διατηρήσει την οικονομική ισορροπία. Τα φυσικά συστήματα μπορούν να αναπτυχθούν όταν ξεφύγουν από την ισορροπία, και έτσι για να αναπτυχθεί το χρηματιστήριο θα πρέπει να ξεφεύγει από ισορροπίες. Οποιαδήποτε προσπάθεια διατήρησης της ισορροπίας με νομοθεσίες και κανονισμούς θα το οδηγήσουν σε αποτυχία, γιατί αυτό μας διδάσκει η φύση. Γενικά μια αποτελεσματική αγορά θεωρείται αυτή στην οποία οι τιμές είναι δίκαιες με βάση τις υπάρχουσες πληροφορίες και ούτε οι αγοραστές αλλά ούτε οι πωλητές βρίσκονται σε πλεονεκτική θέση. Τέτοια αγορά στο χώρο του χρηματιστηρίου θα αποτύχαινε διότι απλώς δεν θα υπάρχει ικανοποιητικό ενδιαφέρον για αγορά ή πώληση.

Τίθεται τώρα το ερώτημα κατά πόσο μια υγιής οικονομία είναι αυτή που απέχει αρκετά από την ισορροπία. Οι οικονομολόγοι που χρησιμοποιούν θεωρίες ισορροπίας για να μοντελοποιήσουν συστήματα που βρίσκονται εκτός ισορροπίας θα καταλήξουν σε λανθασμένα συμπεράσματα. Η φυσική πραγματικότητα είναι ότι ένα συμβάν μπορεί να αλλάξει το μέλλον, γεγονός που βασίζεται στη θεωρία της ευαισθησίας δυναμικών συστημάτων σε αρχικές καταστάσεις ή τιμές. Η συμπεριφορά του επενδυτή δεν βασίζεται στην ιστορία αλλά στην πιο πρόσφατη εμπειρία ή συμπεριφορά. Δηλαδή, μια μετοχή Α που είχε εντυπωσιακή ανοδική πορεία κατά το δεύτερο εξάμηνο του 1999 αλλά σήμερα βρίσκεται σε αξία 10 φορές μικρότερη από το 1999 με μικροαυξομειώσεις, δεν μας ενθαρρύνει να την αγοράσουμε απλώς γιατί οι διάφοροι ανθρώπινοι παράγοντες λειτουργούν με τέτοιο τρόπο που δεν μας ενδιαφέρει η ιστορία αλλά το άμεσο παρελθόν, το σήμερα, το χθες ή το προχθές, τα οποία δεν είναι τίποτα λιγότερο από την αρχική κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος που καθορίζει την πορεία της τιμής της μετοχής. Το γεγονός ότι δεν λαμβάνουμε υπόψη την ιστορία προφανώς να είναι λανθασμένο, αλλά η ανθρώπινη φύση δεν μπορεί να έχει τη δυνατότητα μνήμης που χρειάζεται. Τα μαθηματικά όμως μπορούν να μας βοηθήσουν να κάνουμε χρήση της ιστορίας και να υπολογίσουμε το συντελεστή συσχέτισης του παρόντος και του μέλλοντος, όπως περιγράφεται στο βιβλίο μου[1]. Ακόμη με τη βοήθεια της θεωρίας της Γεωμετρίας των Μορφοκλασμάτων (Fractals) μπορούμε να μελετήσουμε χρονοσειρές τιμών των μετοχών διαφορετικών χρονοβημάτων και χρονικών περιόδων ψάχνοντας για αυτοόμοιες χρονοπεριοχές οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πρόβλεψη.

Ψάχνοντας για τις αυτοόμοιες χρονοπεριοχές

Μαθηματικό παράδειγμα εφαρμογής

Εστω ότι έχουμε μια μετοχή με τιμή P(t) μικρότερη από 1 λίρα. Επειδή υπάρχουν πολλοί αγοραστές, η ζήτηση προκαλεί την αύξηση της τιμής σε ένα συγκεκριμένο ρυθμό αύξησης λ. Η μελλοντική τιμή της μετοχής σε χρόνο (t+1) υπολογίζεται ως :

$P(t+1) = \lambda \,.\, P(t)$ (1)

Η εξίσωση θεωρεί ότι υπάρχουν μόνο αγοραστές. Για να κάνουμε το μοντέλο πιο αληθοφανές, μπορούμε να προσθέσουμε μια επίδραση από τους πωλητές. Εστω ότι ενώ οι τιμές αυξάνονται σε λ . P(t), οι πωλητές μειώνουν την τιμή κατά $\lambda \,.\, P(t)^2$. Το μοντέλο (1) μετασχηματίζεται στο:

$P(t+1) = \lambda \,.\, P(t) - \lambda \,.\, P(t)^2 = \lambda \,.\, P(t) \,.\, (1- P(t))$ (2)

Αυτό το μοντέλο δεν είναι πραγματικό, αλλά μας λέει ότι ενώ η πίεση της ζήτησης αυξάνει τις τιμές με ρυθμό λ, η πίεση της πώλησης μειώνει τις τιμές με ρυθμό λ . P(t).

Ας εξετάσουμε τη συμπεριφορά του μοντέλου επαναληπτικής σχέσης (2) και να τη συσχετίσουμε με τη συμπεριφορά της μετοχής στο χρηματιστήριο.

Εστω ότι η αγοραστική πίεση στη μετοχή Α δίνει ρυθμό αύξησης λ=2 και έστω ότι η αρχική τιμή της μετοχής στο χρόνο 0 είναι P(0) = 0,30. Στο διάγραμμα 1 παρατηρούμε ότι σε μικρό χρονικό διάστημα η μετοχή θα φτάσει οριακά στην τιμή 0,50. Αυτό μας λέει ότι σε ένα επίπεδο ζήτησης που καθορίζει την τιμή του λ, η τιμή της μετοχής συγκλίνει προς μια μοναδική τιμή η οποία θεωρείται ως η δίκαια αναμενόμενη τιμή ή τιμή ισορροπίας.

Διάγραμμα 1. P(0) = 0,30, λ=2

Πότε μια μετοχή έχει θετικό δυναμικό

Δυναμικό της μετοχής

Οπως ανέφερα πιο πάνω, δεν μπορεί να γίνει πρόβλεψη της συμπεριφοράς των τιμών μιας μετοχής αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε κατά πόσο μια μετοχή έχει θετικό ή αρνητικό δυναμικό. Θετικό δυναμικό θεωρούμε ότι έχει μια μετοχή η οποία με βάση την ιστορία της μας δίνει με μαθηματικό υπολογισμό θετικό συντελεστή συσχέτισης του παρόντος με το μέλλον. Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται με τον τύπο:

$C = 2^{(2H-1)}-1$

Πότε οι δίκαιες τιμές μιας μετοχής γίνονται άπειρες...

όπου Η είναι ο εκθέτης Hurst. Αν Η=0,5 τότε το C=0, που σημαίνει ότι το μέλλον δεν σχετίζεται με το παρόν και η τιμή της μετοχής στο μέλλον είναι ανεξάρτητη από τη σημερινή τιμή. Η ακολουθία τιμών στο άμεσο μέλλον μπορεί να θεωρηθεί τυχαία.

Αν 0,5<Η<1,0 τότε το C>0 που σημαίνει ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ του παρόντος και του μέλλοντος. Αν δηλαδή η τιμή της μετοχής σήμερα αυξάνεται, τότε θα συνεχίσει να αυξάνεται και στο άμεσο μέλλον. Αν τώρα το 0<Η<0,5, τότε το C<0 που σημαίνει ότι υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ παρόντος και μέλλοντος. Αν δηλαδή η τιμή της μετοχής σήμερα αυξάνεται, τότε θα ακολουθήσει πτώση στο άμεσο μέλλον και αν σήμερα έχει πτωτική πορεία, τότε θα ακολουθήσει αύξηση στο άμεσο μέλλον. Ο εκθέτης Hurst για μια μετοχή υπολογίζεται μέσω της γνωστής R/S ανάλυσης με τον τύπο:

$R/S = (\alpha.N)^H$

όπου R είναι το εύρος των αθροιστικών αποκλίσεων των τιμών σε N χρονικές περιόδους, το S είναι η τυπική απόκλιση των τιμών και το α είναι μια σταθερή τιμή. Οσο απλός και αν φαίνεται ο πιο πάνω τύπος, τόσο περίπλοκη είναι η μέθοδος υπολογισμού του Η.

Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν το αντίστοιχο κείμενο στα Πρακτικά του 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας ή από τον ίδιο τον συγγραφέα.

Αν τώρα η αγοραστική πίεση αυξηθεί αυξάνοντας έτσι το ρυθμό της μετοχής σε λ=3, τότε εμφανίζονται δύο αναμενόμενες δίκαιες τιμές της μετοχής και το σύστημα ταλαντεύεται μεταξύ των δύο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2. Στην πραγματικότητα, στη μια τιμή οι πωλητές πωλούν και στην άλλη οι αγοραστές αγοράζουν. Δηλαδή εδώ χάνεται η ισορροπία μεταξύ πωλητών και αγοραστών. Με μαθηματικά, οι πωλητές κάνουν την τιμή της $\lambda \,.\, P(t)^2$ να υπερβαίνει του δυναμικού του ρυθμού αύξησης λ και έτσι να μειώνεται η τιμή της μετοχής. Στη συνέχεια, όταν η τιμή φθάσει στο χαμηλότερο σημείο, ο ρυθμός αύξησης επικρατεί λόγω ενδιαφέροντος από τους αγοραστές και αλλάζει η πορεία της τιμής της μετοχής προς τα άνω και πάλι μέχρι να φθάσει το ψηλότερο επίπεδο και πάλι από την αρχή. Αυτό θα αλλάξει όταν υπάρχει ξένος εξωγενής παράγοντας, ο οποίος δεν προβλέπεται από το μοντέλο.

Διάγραμμα 2. P(0)=0,30,λ=3

Τώρα ας υποθέσουμε ότι εμφανίζονται περισσότεροι αγοραστές στο σύστημα, που δημιουργούν μια νέα αγοραστική πίεση, η οποία ανεβάζει το ρυθμό αύξησης της μετοχής στο λ=4. Σε αυτή την περίπτωση τα Μαθηματικά προβλέπουν άπειρο αριθμό αναμενόμενων δίκαιων τιμών της μετοχής. Επειδή το σύστημα δεν μπορεί να καταλήξει σε συγκεκριμένη τιμή ισορροπίας δημιουργείται μια ακολουθία τιμών η οποία περιγράφεται ως χαοτική, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.

Διάγραμμα 3. P(0)=0,30, λ=4

** Ο δρ **ΓΡΗΓΟΡΗΣ Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ** είναι καθηγητής Μαθηματικών και αναπλ. κοσμήτορας INTERCOLLEGE, πρόεδρος της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας.*

1. Γρ. Μακρίδης, «Χρηματιστήριο - Κοινωνία: Μια Μαθηματική Προσέγγιση», Πρακτικά 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας (Κεντρική Ομιλία). Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.